

9392

II

lib. Jap



[illegible]

o matematyce wyjącej, ten dwojgi byłby z pewnością wielki, więc nie
~~zależy~~ redziłby Panom ^{z pierwszego roku} zapisać się na te kursy, który przychodzi
wprost z gimnazjum. — ~~Ważni~~ oprócz jeżeli moje przydatnie trochę
zorganizował się z matematyki wyjącej.

Je ^{wszystko} proszę ~~Ważni~~ ~~Ważni~~ Panów jak najgorliwiej zająć się z
wielu uwagą. Kedykolwiek w z wykładów nie byłoby zupełnie
jawnym, i zająć się Panowie się do mnie udawali kedykolwiek by
Nam się nie straciły jakieś trudności w rozumieniu przedmiotu.

Wykłady fizyki teoretycznej wogóle pod pewnym względem wiele ważniejszą
niż od innych wykładów. Mianowicie nie mamy prawie żadnych
podręczników fizyki teoretycznej w języku polskim; mamy tylko
mechanikę Frankego, małą książkę Fekana i wstęp do fizyki matema-
tycznej Natansonowa, który tytuł się tylko spójniejszą część fizyki t.j.
termodynamiki; podczas gdy ^{o do} ~~z~~ innych mniej istotności ~~z~~, w matematyce;
chemii, także ~~z~~ fizyki doświadczalnej mamy podręczniki zupełnie
wystarczające, czasem nawet doskonałe napisane. Wiele w ~~tych~~ ~~przed~~
naszym przedmiocie Panowie będą ograniczeni ^(po najwęższej linii) na ~~tych~~ podręczniki
w obym języku napisane mianowicie niemieckie, które naturalnie
jawnie trudniej zrozumieć niż polskie — i na wykłady.

Wiele trzeba wulter sterać dokładać ich ~~wykładów~~ wykłady zrozumieć
i pisać i ich wyprawy mieć w porządku, to potem przy egzaminach

zasad więcej pewnych (~~opisów~~ ^{dokładnie} ~~nie ma w rzeczywistości~~) ale widać nie dość netywnych
t. j. ~~nie~~ nie netywnych nie ma w rzeczywistości. Każde ciało po
działaniu się zmienia do pewnego stopnia swój kształt i takie
te odkształcenia zwykle stosunkowo bardzo małe, których zbadaniem
widać nie rezygnuje się nigdy sprzyjstwie, trzeba uwzględnić przy
dokładnym opisanie zjawisk ruchu ciał. ~~(Co do tego punktu np.)~~
^{pytanie}

z nowych zasad powstaje badanie Thomsona, Darwina i innych
co do zmienności kształtu ziemi wskutek przyciągania księżyca
i słońca. Także ziemia może nie być ściśle netywna, tylko do
pewnego stopnia wydłuża się w kierunku przyciągania księżyca i słońca

○ ○, choć naturalnie to wydłużenie bardzo jest nieznaczne;
następuje zjawisko podobne do
~~zmniejszenia się~~ ~~ciężkości~~ ~~nie~~ przyspieszenia i odpychania morza ale
~~nie~~ mniej ~~nie~~ wyraźne niż tamto.

Pierwszymi dwoma działaniami mechaniki 4 j. mechanicznego punktu i ciał
netywnych zajmował się pierwszy rok, teraz więc następuje bliższe
zbadanie zmienności kształtu ciał następujących w skutek działania sił
zewnętrznych, będących ich zjawiskami tęża sprężystości.



W mechanice sztywnymy stary podział na mechaniczne ciała sztywne, sprężyste i. t. d. ~~jest~~ Połoga on właściwie na ^{metody} ~~rozróżnieniu~~ ogólniej ~~który~~ się stosowany w badaniach przyrody tej na metody ^{przybliżenia sztywności} „der successiven Annäherung”. Tak mowiliśmy w mechanice najpóźniej mechanicznego punktu ~~metrycznego~~. Punkt metryczny nie występuje w rzeczywistości jest to pojęcie odległości, ale używamy je aby uprościć nasze rozumowania gdy nam nie chodzi o to że ciała jak kulki mają na ziemi pewne rozmiary. Tak np. takie w astronomii jeżeli rachujemy kształt dróg planet i komet etc. ~~nie~~ używamy mechanicznego punktu. O zdecydowanym przybliżeniu się dąży do rzeczywistości jeżeli uwzględniamy ~~na~~ kształt i rozmiary ciała poruszającego się, całe jednak uwzględnia kształt jako niezmienny — powstaje mechanika ciał sztywnych.

Dodanie nad katolickimi ziemiami, nad ~~Tyrolami~~ jej obrotu, nad
pewnymi ozi, nad ~~potwierdzenia~~ jej ozi ziemiami, nad ~~potwierdzenia~~ jej ozi,
które określony przez prawników i notariuszy i t. d. ~~nie~~ da się
nie przyjąć, nad tymi rodzajami rozmawiać.

Nie takie mechanika wóś sitywnych jest tyłko obrazem idealnym,
który nie odpowiada dokłaśnie rzeczywistości. Nie sity zasady
mechaniki nie były ~~dokładne~~ ścisłe — a dotąd na świecie nie mamy

nam się dawniej nie śniło n.p. elektryczności, magnetyzmu etc., których³
nie porównamy bezpośrednio jakimś osobnym zmysłem, więc najłatwiej
je zmysłowi porównujemy ów ~~stanowi~~ pogląd na świat i że nie^{absolutny}
zjawisko fizyczne według tego czy właśnie przypadkowo zjawisk ma
zmysł odpowiedni, tylko według związków we tworzących między
sobą ich zależności. Tak n.p. porównujemy je optykę jest tylko
specyjalnym przypadkiem elektryczności t.j. takim jakim odległość fali
elektrycznej wynosi około 0'0006 do 0'0003 mm, więc przydzielamy
optykę do elektryczności a podobnie kustykę do mechaniki.
Kustyka teoretycznie nie stałaby ~~raczej~~ ^{raczej} istnienie jako część mechaniki
t.j. jako nauka o ruchach ciał (przedmiot) materialnych
takie gdyby wszyscy ludzie byli głusi. Nauka o wzpłot dźwięku
i rozdźwięku o harmonii etc. naturalnie nie istniałaby, ale to takie
związanie nie należy do fizyki tylko do psychologii. Tylko że ~~optyka~~ ^{optyka} dźwięk
praktycznych zajmujemy się temi zjawiskami we fizyce doświadczalnej,
we fizyce teoretycznej & z niemi wcale nie mamy do czynienia
które przetoż nam podzielić na 3 wielkie grupy: mechanikę,
elektryczność na podstawie teorii Maxwella, i ~~optykę~~ ^{optykę}, fizykę ^{eventual}
~~optykę~~ i ~~te~~ ^{te} dwie grupy ^{być może} ~~można~~ ^{je} po wreszcie zredukować na mechanikę,
ale tymczasem jeszcze związek ten nie jest dożył wystarczająco wyjaśniony.

się przysła i dużo pracy onurza.

Wspomniatem już że w przeszłym roku lub wstępując lat / przeszłym
~~został~~ do skróconego całkowitego wykładu fizyki matematycznej.
Zaczął my mechanikę, w przystępny sposób ^{postępowo} ~~przebiega~~ moim teoretycznym
potwierdzeniem, na przystępny rok elektryczność i optykę, w tym samym roku
termodynamikę. Jest to podział różniący się już nieco od podziału
zwykłego, jaki n.p. napotykanym ~~został~~ w ~~tych~~ podręcznikach gimnazjalnych.
~~Tutej opisałem tradycyjną historię i nie podzieliłem fizyki na~~
~~wielką energię przez które panujemy i jasność swą, tylko~~
~~wielką~~ Tam w gimnazjum przez tradycyjną historię i przez
przez konserwatywny rotat przechowany pogląd na świat, który moim
nawet niewymyślny tej, który uważa świat jako środek świata
i dzięki zjawiskom światu swobodnemu wielką tego jak się jego energią
przedstawia. Co wchodzą i co wchodzą podzieleniem noliq do chemii,
co wchodzą do optyki, co wchodzą do akustyki, ruchy ciała i in. &
~~Wielką~~ które panujemy n.p. przez użycie w miarę czasu co do noliq
noliq do mechaniki, a zjawiska ciepła i innych istnień doświadczalnych
~~nie zapomnę ciepła~~ noliq do a opierając się na tym
dotychczas zapozna nas z innymi innymi rodzajami zjawisk z ciepłem.
To jest dotychczasowy stary sposób podziału.

Tymczasem podobnie że występuje jeszcze mnóstwo różnych zjawisk, których

Takie
to ~~główny~~ ^{prawy} ~~zajmujący~~ się ^{złazanie} prawami statyki i tego rodzaju
i ~~nie~~ ^{nie} ~~przysł~~ ^{przysł} ~~że~~ ^{że} mechanika jest marna. Uważa nie interesującą się
kinetyki, nauki o ruchach stać nie można uprawiać, bo wymaga ona
rachunków wyższego.

Nu mamy ~~coś~~ ^{coś} ~~główny~~ ^{główny} ~~zajmujący~~ ^{zajmujący} ~~się~~ ^{się} ~~zajmować~~ ^{zajmować} ~~tem~~ ^{tem} ~~historię~~ ^{historię} ~~mechaniki~~ ^{mechaniki}
Nach Sichte der Mechanik.

Zacznijmy mechanikę punktową przy czym zaraz poznamy pojęcie
współdzielni wyższej matematyki.

nie mamy. Oprócz wstępów Newtona, Fabeana, Frankya
które Panu jak najmocniej polecam, nie mamy żadnych podręczników
polskich, więc ~~justo~~ Panowie będą ograniczeni na kursach matematyki
z powodu języka naturalnie jemu trudniej zrozumieć - i tak nie na wyrostach.

Wspomnieliśmy już rozkład na 4 lata

innymi niż 5 filozofii, tam na pewno tu krótko- i średnio-

w p. skróty do mechaniki, optyki do elektryczności

rozkład mechaniki : ~~ciężkości~~
punktu, ciężyści, ciężyści
polega na ^{metodzie} (zasadzie) przybliżenia stopniowego

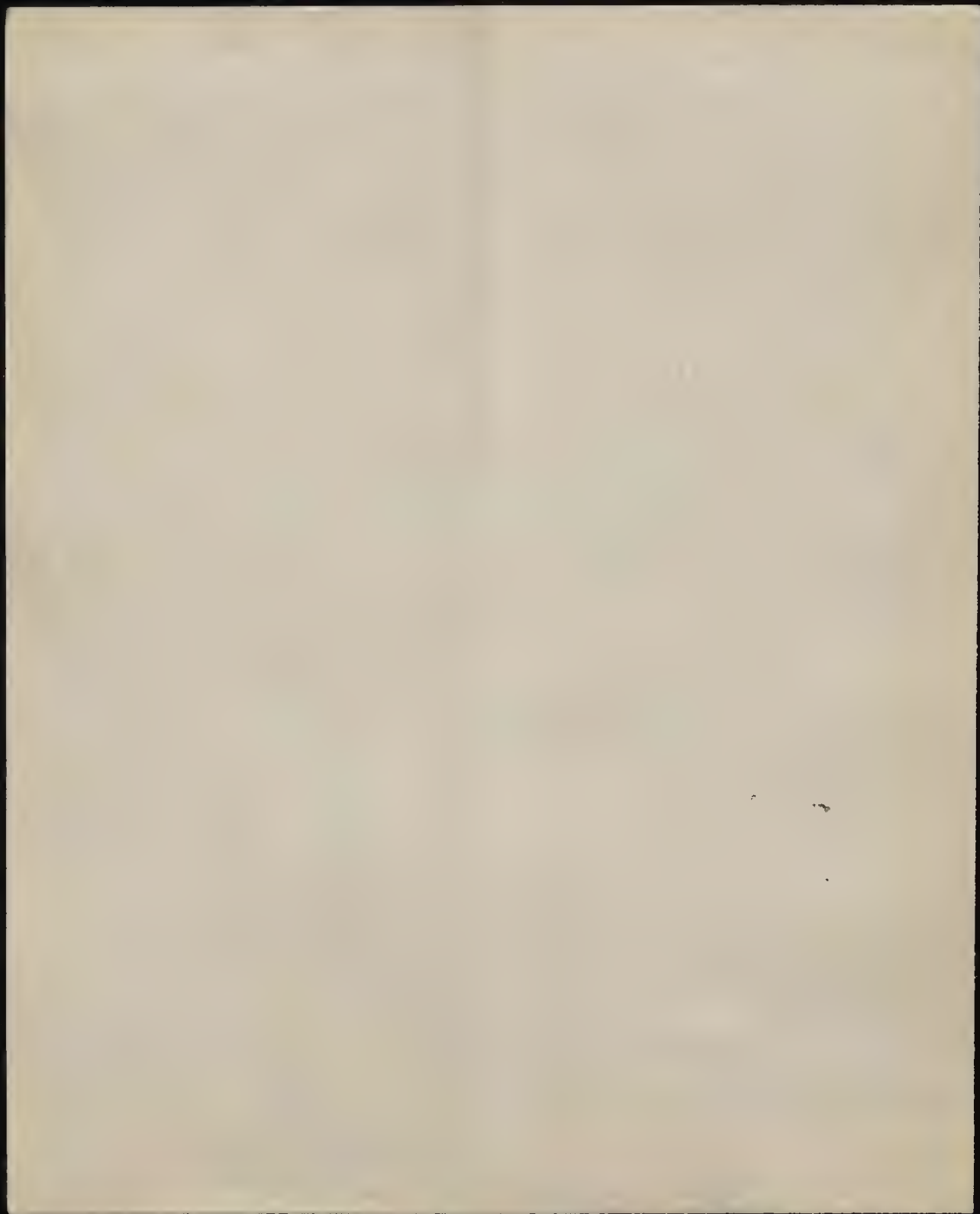
Amst.

Podobny jest w całości rozwój historyczny mechaniki
^{Galicji} punktu, Newton 1642

ciężkości: Laplace, Euler, Hamilton

ciężkości: Poisson, Navier, Stokes
i hydrodynamic

nie ~~to~~ wspomnieliśmy wiele o poprzednich Galileusza, ~~nie~~ ~~nie~~
oni ewoluowali tylko statycznie, to nie jest osobny oddział mechaniki tylko przybliżony
przynajmniej, gdzie $\text{m} = 0$



6

paten. v. Franke XIV

syfi obrew naturae i ontogenety
tehnicijskii

[illegible]

Jako velice odlišné utváření je rovněž odlišná inspirace po kněžích
Aristotela: 29 pramenů pramenů velké provincie: zpráva o dotaci
1457-1510 (Pac)

[illegible]

Solomon 1564-1642 : ~~the~~ new species

Discorsi di dimotocinesi
intorno a due nuove scienze

nucléon nuclei nucleus
nucléon nucleus nucleus

Trouilli, Stirrins, Hingens: troya wachello (cyphodent, spargane etc)
Horagium occellatum 1673

Newton 1642-1727 *Phytosphaera utricularis palmarum* Swth.

Demoulti, Enten, I' Muck, Zeygen

ujduktogirini methods, quality, 1888, 1891
Nakaryu analysis

Tak z. Natura jini melakukaké nggawé ingetane enam, padras gely w inggah daktak
fingpi bedane pangthi



Copiea problem i pyta.

Ruch prostoliniowy

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Zobaczcie ruch w tym samym
kierunku (tętno się zmienia)

$$s = a + b \cdot t^2$$

$$\frac{ds}{dt} =$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} =$$



Spodziewam się więc iż i Panowie przekonają się że mechanika należy
do części najwyższej zajmujących przyki, ^{gdyż nie należy do nauk przyrodniczych} ^{2. rozdział} ³ ⁴
można ~~Porównać~~ ^{Porównać} także prawie całą astronomię
kiedy innymi działami przyki i tworzy miejsce ich podstawy.
~~A stosunek rozpoznania należy stąd przyki mechanicznej, tej~~
~~nauki i nauk o ciele, gdyż tutaj zastosowanie matematyki do przyki~~
~~dodaje najłatwiej jest zrozumieć.~~ ^{Właściwie} Jedną imo część przyki nie
nadeje się tak bezpośrednio do badania teoretycznego, i wiedzy
innej nie nauczy się tak łatwo sztuki najważniejszej dla przyki t.j.
sztuki zdołności przedstawienia sobie praw przyrody pod postacią
wzorów matematycznych i odwrotnie: wyciąganie wniosków najniż-
szych co do rzeczywistości z naszych ~~prawa~~ rachunków.

Z tego powodu też mechanika najpierw się rozwinęła. Newton
wygłosił prawa ogólne mechaniki, te same które teraz już po-
dany, gdy w innych częściach przyki już nie najprostszymi urządze-
niami. Optyka, ciepło, elektryczność, magnetyzm w ogóle prawie
dopiero w naszym stuleciu zostały lepiej poznane, ^{gdyż mechanika już od tego}
^{trzydziestego stulecia} ^{zakończona} ^{wykorzystana}

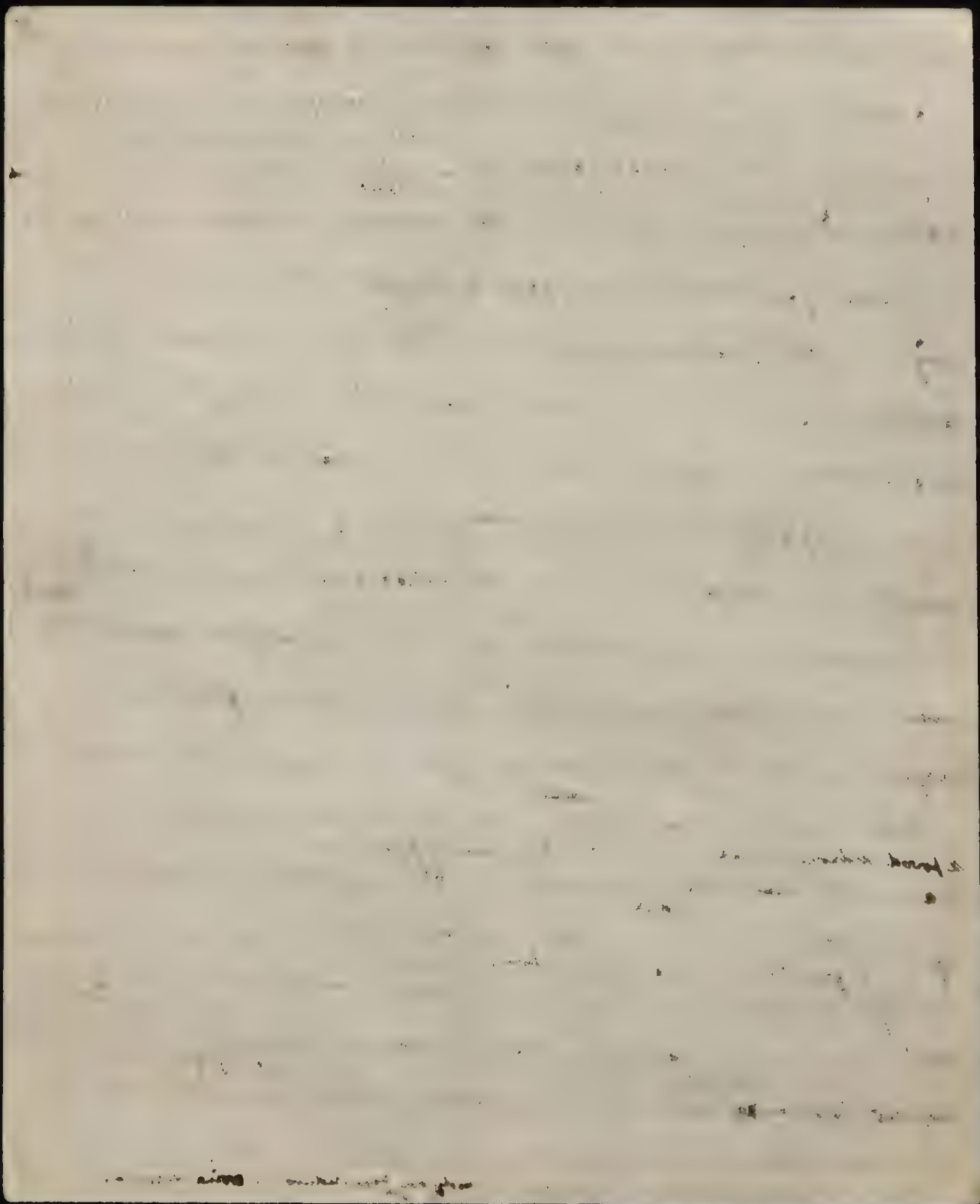
A z tego pochodzi, że mechanika nadaje cześć całej naszej przyki.
Newton nauczył nas pojęcia siły t.j. iloczynem z masą i
przyspieszenia $m \frac{d^2x}{dt^2}$, które ukształtowało się tak wreszcie w teorię
grawitacji i elastyczności sprężystości; tak iż potem starano się i
A. 13 dr. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

w innych ciałach przyki do zjawiska fizyczne w przewodni⁵
na działaniu takich sił. W ten sposób ~~dziśto jest~~ elektrycznych⁷⁰
~~(pozwanych wzmiankach)~~ i magnetycznych zjawisk
i magnetycznych, prowadzi się na ~~bysto~~ elektryczno-magnetycznych⁷⁰
~~kiedy tak samo ugotuje się w uprzedzeniu jak we wnętrzu~~ (działanie)
które pod powyższymi dowiadzaniami porównani wzmiankami parostoj.

Wobec zjawisk cieplnych pojęcie ~~siły~~ ^{energii} nie mogło być
wzięte, ciekło ^{umownie} ~~można~~ jako coś ^{odrębnego} ~~niezależnego~~, jakiej energii, fluidum,
czy Joule, Robert Mayer i inni wykazali że ciepło jest w najgłębszym
związku z inną postacią ~~z~~ ^z ~~wiedzą~~ ^{wiedzą} z mechaniki stąd z tego
zwano energię kinetyczną $\frac{mv^2}{2}$, pojęciem wprowadzonym do
nauki przez Longofera: Leibniza, i ostatecznie twierdzenie o ^{zawartej} ~~zawartej~~
energii.

Równocześnie inny oddział fizyki t.j. akustyka, wprowadziła
 znów nowe poglądy mechanizane w zakres fizyki, które nabyły nie-
 może z mechaniką nie wspólnego. Jest to pojęcie tak zwanych
 ruchów ukrytych, ^{zobacz} ~~z~~ to ruchy, których nie widzimy bezpośrednio
 (z powodu drobności ugięć, lub zbyt małej masy) (np. falowanie powietrza)
 naocznie, ~~ale~~ ^{widok} które suponujemy, aby wytłomaczyć zjawiska
 tego rodzaju w innych wypadkach np. akustyczne.
 (Zobacz tłumaczenie zjawiska z falcowaniem powietrza)

W tym wypadku rzecz zdaje się być jemu bardzo naturalną i prostą,
gdyż osamotnieniu na oświecenie w dziedzinie moim wyraża się do niego
stopniem ^{po prostu} folwanki. Ale ten sam sposób wytkomaczenia dot. się usię
lokalnie do wyłączenia zjawisk optycznych. Powstała teoria
^{gdzie już nie ma już żadnego związku między nimi}



6

etls do ~~fulvum~~ ~~ithum~~ 11
 mucus dregis lat fulvigeo rostris k etan

Ale nietylko ze udało się stworzyć prawa dawniej już znane pod
 potęgą mechanizmu, ale nawet niedogodnej często, niezgodnie z
 teorią kinetycznej gazów udało się tworzyć ~~zgodnie z~~
 na podstawie nowych teorii mechanicznych odkryć prawa ~~pracy~~
 zjawiska, dawniej niemożliwe ~~do~~ i dopiero potem sprawdzone
 doświadczalnie, co naturalnie opromienie przemawia na korzyść
 tych teorii mechanicznych.

która słomą sprężystości, rozszerzaniu się ich z ciepła, różnie ich
stan skupienia i t. d. za pomocą ruchów niewidocznych molekuł wy-
dróżnia, ^{i która u innych urosła tak ekonomicznie i regularnie} a to same poruchy ukrytych prądów i do
elektryczności i magnetyzmu zastosowane przez Rothemann i Maxwella
którzy pokorali im i zjawisko ^{te} elektromagnetyczne miano wytkomaczyli
za pomocą układu pewnego ruchomego urządzenia t. zw. stw.

Muszę tu jednak dwa uwyżnić restorowanie. To pierwsze zawsze naturalnie pozostały jeszcze pewne mniejsze części przyki, w których nie zdołano jeszcze przeprowadzić orego ogólnego poglądu mechanicznego. To nas naturalnie nie może dziwić, gdyż również wiele ^{jest} części przyki ~~jeszcze~~ ^{jednie} w ogóle nie znamy jeszcze praw zasadniczych n. p. fluorescencyjnego promieni Röntgena etc. Z czasem w tem dalej postępujemy.

Ale dodam drugie restorowanie, ważniejsze, t. j. że nie chcę twierdzić, jak się to często czyta i słyszy, że mechanika albo powiedziemy że ruch jest jedyną ^{i że mechanika inne zjawiska są tylko formami ruchu} rzeczywistą istniejącą. To oczywiście istnieje, czy ~~ruch~~, elektryczność, czy ruch, czy wó w jesus jest ściślejszym od ruchu, tego nie wiemy, i to nas jako przyków też wcale nie obchodzi. My jesteśmy zadowoleni, nasze zadanie jest spełnione jeżeli znamy zjawiska fizyczne, warunki pod ^{one} których zachodzą i jeżeli mamy system ogólny który pozwala wywieść je z najgłębszych zasad. A takim teraz dla nas zdaje się być system mechaniczny. Możebyć że gdyby ~~ktos~~ przed Newtonem był świadom zjawiska elektrycznego, że teraz niedługoż tworzył elektryczną mechanikę albo w ogóle system elektryczny przyki. Ale tak nie stało się. Rozwój historyczny przyki następował w sposób najnaturalniejszy, prowadząc inne zjawiska fizyczne do mechaniki gdyż zjawiska ruchu dla ^{naszych wyobrażeń} ~~nas~~ są najjaśniejsze i dla ^{tego dla} ~~innego~~ naszego są być najłatwiej zrozumiałe.

Rozwój ten się może być ~~daleko~~ ^{stwierdzić} nad temi kwestyami, ale ~~nie~~ ^{może} to ~~nie~~ ^{uwyżnić} to

~~Wieloletni doświadczenia i badania~~
 stykając Panów praktyczni i ~~świeżo~~ mni jest ~~nie~~ mądry i mądry
 precyzyjnie mądrym i cenniejszym niż ich rozprawy na i punktu
 widzenia wybitnego, filozoficznego, a po drugiej stronie nie ma
 rzetelnej fizyki, i ona tworzy fundament do jej zrozumienia.

Chciałobyśmy obszerniej pisać o rozwoju historycznym
mechaniki, ^{samej} ale niestety czas mi na to nie pozwoli; muszę się
ograniczyć na to aby Panom zalecić ^{zalecić} ^{zalecić} jak najmocniej książkę,
nadsyłając interesującą i dobrą, łatwo zrozumiale napisaną, Mach'a:
"Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt",
która chyba każdego przekona, ~~jak~~ ^{że} i książki naukowe mogą
być tak zajmujące jak romansy.

Kilka słów więcej o tym mogą jeszcze powiedzieć.

W starożytności i w średnich wiekach ~~zawiera~~ ^{znano} tylko statykę. Omachu
ciężkości niano najdoszalsze wyobrażenia n.p. porównano ruchy w
ruchy naturalne n.p. spadanie ciężkości i ruchy gwałtowne n.p. rzucanie
ciężkości, myślano że ciała spadają ze szybkością stałą do wysokości etc.

W nowoczesnej mechanice statyka stała się zajmującą bardzo uproszczoną
stanowisko. Ponieważ ona jest tylko przypadkiem szczególnym kinetyki
t.j. takim jakim ruch wszystkich ciał równa się zero, więc
ma prawo ruchu. Znamy i tak już prawo spoczynku.

¹⁵⁶⁴⁻¹⁶⁴² Galilei pierwszy krok zrobił na polu kinetyki. Odkrył prawo
spadania ciężkości. Później Kepler odkrył prawa, według których
planety się poruszają — stworzone z innych jego trzech praw.

A Huyghens badał ruch wahadłowy

— więc już i tak było jako ułamek —

9 To były tylko pozornie ^{przypadki} przypadki ruchu. Newton (1642) ⁻¹⁷²⁶ uogólnił
nawet ogłosił ogólną prawo mechaniczną, które obejmowały te
ruchy, które są znane i które są dotychczas uważane jako fundament
naszej fizyki. Warto zwrócić uwagę - nieważne miejsce - spamiętać sobie
te dwie daty 1564, 1642 są one ważniejsze niż niejedna data
historyczna, czas porównania jakiegoś króla, jakiego króla etc. to moja
największa domniemanie o ~~te~~ historii: widny ogólny ludzkiej.

Przez rok, w którym Michał Anioł umierał - koniec epoki
sztuki włoskiej - i w którym Galileusz się urodził. Drugi rok w
którym Galileusz umierał - Newton się urodził.

Gdyż raz prawa ruchu Newtona były ^{znane} ewaluowane, mechanicznie było
dane. Dalsza praca ^{opracowywanie} polegała już tylko na wypracowaniu szczegółowych
^{co przedstawia już tylko kłopotliwych trudności} przypadków i do ~~specjalizacji~~ przekształcenia tych praw w inne
formy, które czasem stają się zastoso- ^{nowisko D'Alemberta}wał nie pierwotne prawa.

Do tego wglądu szczegółu trzeba wymienić Lagrange, Laplace
Poisson, Hamilton. ^{to} Zasady D'Alemberta, Lagrange'a i Hamiltona

pościnę wiele bystrzemu ^{obdarzonego} umiś do uogólnienia.

Najnowsza epoka w mechanice zdaje się być krytyczna t.j. krytycznym
zbadaniem jej zasad i wybudowaniem całego systemu w formie jak najwięcej
logicznej i ścisłej. W tym kierunku ^{pracował i pracuje} szczególnie Mach, Hertz, Boltzmann.

W nowszych czasach wykle drży mechaniki na kinematyki i kinetyki.
Kinematyka jest nauką o ruchu punktów lub układów punktów
bez względu na ich masę lub na siły działające, więc o ruchu czysto
abstrakcyjnym. Kinetyka zaś powstaje, jeżeli wprowadzamy
pojęcie — wiście z doświadczenia — masy i siły która na dany
układ działa i ~~przez niego~~ rzeczywisty ruch wywołuje.

Na ten podział wiele za sobą i jest przeprowadzony n.p. w mechanice
prof. Fabiana, prof. Franka i także w zasadach fizyki Witkowskiego
ale tutaj ze względu ^{dydaktyczno-} praktycznych — t.j. dla tego bo zbyt ~~nie~~ ^{ciężko}
ograniczony jest zakres wykładów naszych — nie było się już tymczasem,
~~zatem~~ ponieważ przy każdym zadaniu mechanicznym byłoby
i tak musielibyśmy wyznaczyć rozwiązanie kinematyczne. ^{Ważne jest to do nas} ~~praktyczne.~~

Ze względu praktycznej ergonomii podzieliłbym nasz przedmiot
na mechanikę punktu materialnego, mechanikę układów punktów
i mechanikę ciał stałych.

Co do kinematyki punktu ograniczamy się tymczasem na najprostsze
pojęcia, później i tak zafundujemy do bardziej skomplikowanych
i innych sposobnościach.

Ruch punktu możemy opisać w symbolach matematycznych w
różny sposób.

Np. tak że podajemy kształt drogi na której się porusza

11) i znajdujemy w ilorazach wielu punktach wasz punkt ten
 przechodzi; tak n.p. astronomowie potęgują obserwacje nowo odkrytych
 komet, albo podążają ^{normalnej} ~~rysują~~ dróg ruchy na mapie etc.

Matematycznie doświadczyć ten opis będzie dopiero, gdy potrafiemy
 wyznaczyć równanie krzywej, na której punkt dodaj. jego drogę
 albo tam n.p. $y = f(x)$ odnosząc do g. współrzędnych prostokątnej
 jeżeli droga płaska i zwracając $x = f(s)$ albo też $x = f(y)$ $y = f(x)$ $z = f(s)$
 lub odwrotnie $s = f(t)$ etc. jeżeli droga podąża
 krzywą n.p. na kształt
 inby $y = f(x)$ $z = f(s)$
 $s = f(t)$

Znając te równania już łatwo wyznaczyć takie wielkości szybkości
 w pewnym punkcie.

W momencie t punkt znajduje się w $s = f(t)$

$$t + \Delta t \quad s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

Wtedy $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = prędkość ~~średnia~~ ^{średnia} między punktami s i $s + \Delta s$

Jeżeli zmniejszymy długość drogi Δs w nieskończoność, to otrzymamy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t) = \dot{s}$$

odpowiedni do
 prędkość drogi nieskończoności

a to nazywamy prędkością w pewnym punkcie. ^{prędkość w pewnym punkcie, prędkość, prędkość}

Od tej one małe rozróżnienie kierunku stykania do drogi w punkcie, więc
~~dotowa~~ ^{dotowa} kąta utworzonego między stykaniem i osi X będzie $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$
~~styczna~~ ^{styczna} $\frac{dx}{ds} = x$ $\frac{dy}{ds} = y$ $\frac{dz}{ds} = z$

a w ruchu trójwymiarowym z $\frac{dz}{ds}$

Ten sam ruch można przedstawić także tym sposobem


15 ¹²

$x = \varphi(t)$
 $y = \psi(t)$ } Także jeżeli tym sposobem w każdej chwili drążka i rączki
są dane ruch całkowym i ich jest oznaczony.

Mozna też 2 równania uważać już jako przybliżenie najprostszego składowego
ruchów 2 drążki ruchów prostych drążków w kierunku osi X i Y .

Wystawmy sobie n.p. że punkt odrywa ruch $y = \psi(t)$ na tej tablicy
 $x = 0$

t.j. ruch ~~to~~ w kierunku Y , ewentualnie nie jednostajny.

 a zarazem tablica ma poruszać się w kierunku osi X
tak że powstałe współrzędne ruchu są wtedy $x = \varphi(t)$
wtedy ruch punktu naszego odwrócenia do kierunku
wskazałbyśmy absolutnie ten sam jak przedtem. Ruch y i x niezawisły
wtedy składowe, a ruch całkowity, który z nich otrzymamy wypadkowy.

~~Także~~ Stwierzamy jeszcze wyraz ~~na przykład~~ prędkości ruchów składowych
t.j. tak zwane prędkości składowe.

W ten sam sposób jeżeli przedtem znajdźmy $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ prędkość w kierunku Y
 $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ prędkość w kierunku X

Jeżeli prędkości w kierunku Y  to oczywiście wypadkowa prędkość

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \text{ jako prędkość.}$$

Łatwo z tego przejść do wypadku ogólniejszego, gdzie ruch składowy
nie są prostopadłe do siebie lecz pod jakimś kątem podchylonym

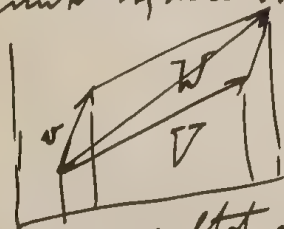
13 Jeśli n. p. punkt obrywa na tablicy much

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

a równocześnie tablica sama much $x = \phi(t)$
 $y = \psi(t)$

(natomiast w ten sposób ichy zawsze oni względnych do siebie powrotu równoległe), to w pewnym momencie punkt by dnie obrywał dwa ruchy składowe



prze co uzyskujemy dostanie się w przeciwny bok równoległego boku utworzonego z prędkości v i V .

Ten sam rezultat otrzymamy rozkładając każdy z oryginalnych ujęć w dwie prostopadłe do siebie prędkości

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \phi'(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} \phi'(t) \\ \psi'(t) \end{aligned}$$

$\phi' + \phi'(t)$ w kierunku X

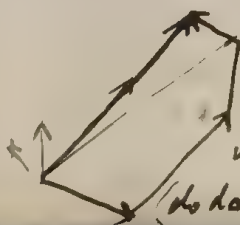
$\psi' + \psi'(t)$ w kierunku Y

~~prędkości składowe~~ Wzr

co uzyskujemy odpowiada składowi org
 Componenten, Resultierende Kraft

Wypadkowa prędkości dwóch ~~składowych~~ równych równa się wielkości i kierunkiem przekątnej równoległoboku utworzonego ze składowych prędkości. (Tę która wychodzi z kąta prze nie utworzonego).
 Nierówny także konstrukcyj: dodawaniem geometrycznym; więc także: Dla wypadkowej prędkości rozumiejąc geometryczną sumę składowych.
 Jeśli mamy więcej składowych do składowania wtedy będziemy je dawać po drugiej składowej więc

także jeśli nie licząc w stałości



wypadkowa = boku zamkniętym wielokąt utworzony ze składowych (do dawanych w dowolnym porządku)

Przejdemy teraz do pojęcia przyspieszenia.

Jeśli prędkość wciąż ten sam ma kierunek i tę samą wielkość, nazywamy to ruchem prostym jednostajnym. Jeśli zmienia kierunek lub wielkość to zmianę tej prędkości - odniesioną do czasu w którym następuje - nazywamy przyspieszeniem. Przyspieszenie ujemne równa się opóźnieniu.

Wróćmy raz jeszcze do atry ruchu prostego $y = \varphi(t)$
 $\dot{x} = 0$

Prędkość w momencie t jest $\varphi'(t) = \frac{dy}{dt}$
 w momencie $(t + \Delta t)$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t+\Delta t} = \varphi'(t + \Delta t)$


Wzrost zmiany prędkości $\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \left[\begin{array}{l} \text{Beschleunigung} \\ \text{acceleration} \end{array} \right]$
 a przyspieszenie, $w =$
 (średni)

Zmniejszając nieskończenie do pierwsz czasu Δt , który obieramy
 otrzymamy przyspieszenie w momencie t :

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t + \Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t}$$

$$= \varphi''(t) = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

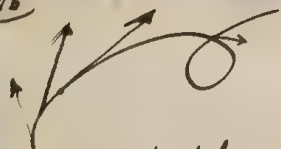
druga pochodna

Również $\frac{d^2 x}{dt^2}$ w kierunku x , 

Wzrost przyspieszenie ~~całkowite~~ ruchu wypadkowego

zobacz $\sqrt{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2}}$ } to nie można już wyrazić tak łatwo jako funkcję x i y .

Można więc także innego sposobu przedstawienia tej rzeczy
 t.j. za pomocą tzw. hodografu.



Obieramy pewien punkt jako początek współrzędnych.
 co do wielkości i kierunku

i wykreślamy z niego odcinki równe prędkości w różnych punktach.



Wtedy utworzona przez końce tych odcinków

krzywa się nadoprosz.

z kształtu drogi samą nie możemy
 jejnie pobrać dokładnego wyobrażenia unless
 do ośmiu wiersz nadoprosz.
 ale ośmiu wiersz nadoprosz. i ośmiu punktów odmiennych
 w kierunku

Jeżeli chcemy znać prędkość w jakimś punkcie drogi wykreślamy styczną do drogi, a równoległą, przeto, do punktu odmiennych
 tego punktu kierunku przyspieszenia możemy wykreślić.

$$\begin{array}{cc} \text{w. p.} & v(t) & v(t+\Delta t) \\ & \underbrace{\varphi'(t)} & \underbrace{\varphi'(t+\Delta t)} \\ & \varphi'(t) & \varphi'(t+\Delta t) \end{array}$$

Łącznica między końcami odcinków
 w V daje kierunek przyspieszenia

a wielkość jego równa jest drugiej
 podzielonej przez Δt

To jest oczywiście to same przypuszczenie całkowite jak przedtem, bo
 składowe jego będą $\frac{\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t}$ i

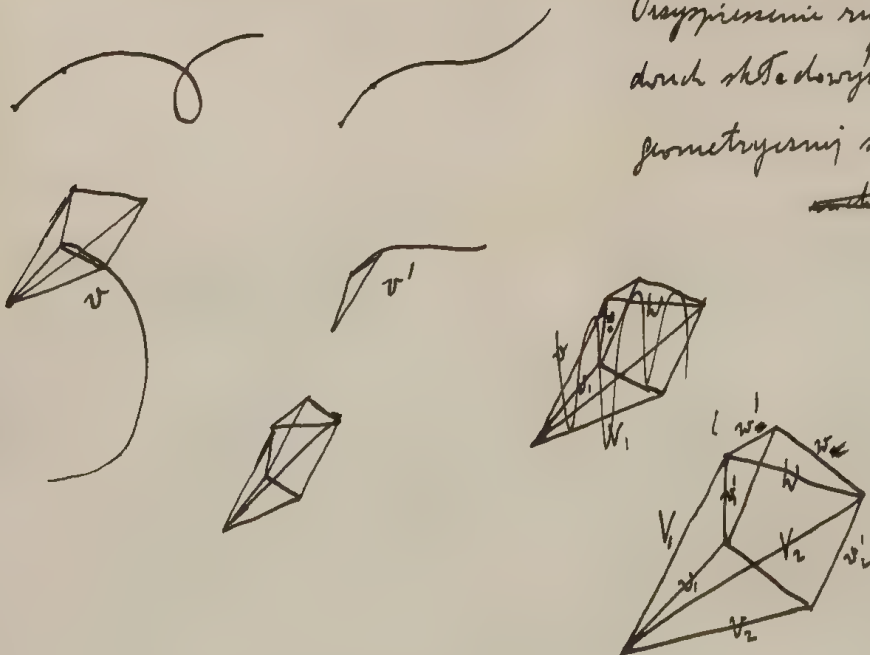
Wszystkie przypuszc. całkowite nadają wy. d. k. z. ~~stet~~ zajądzy się
 w ten sam sposób jak przedtem wy. d. k. z. jego punkty z równoległ.
 bok

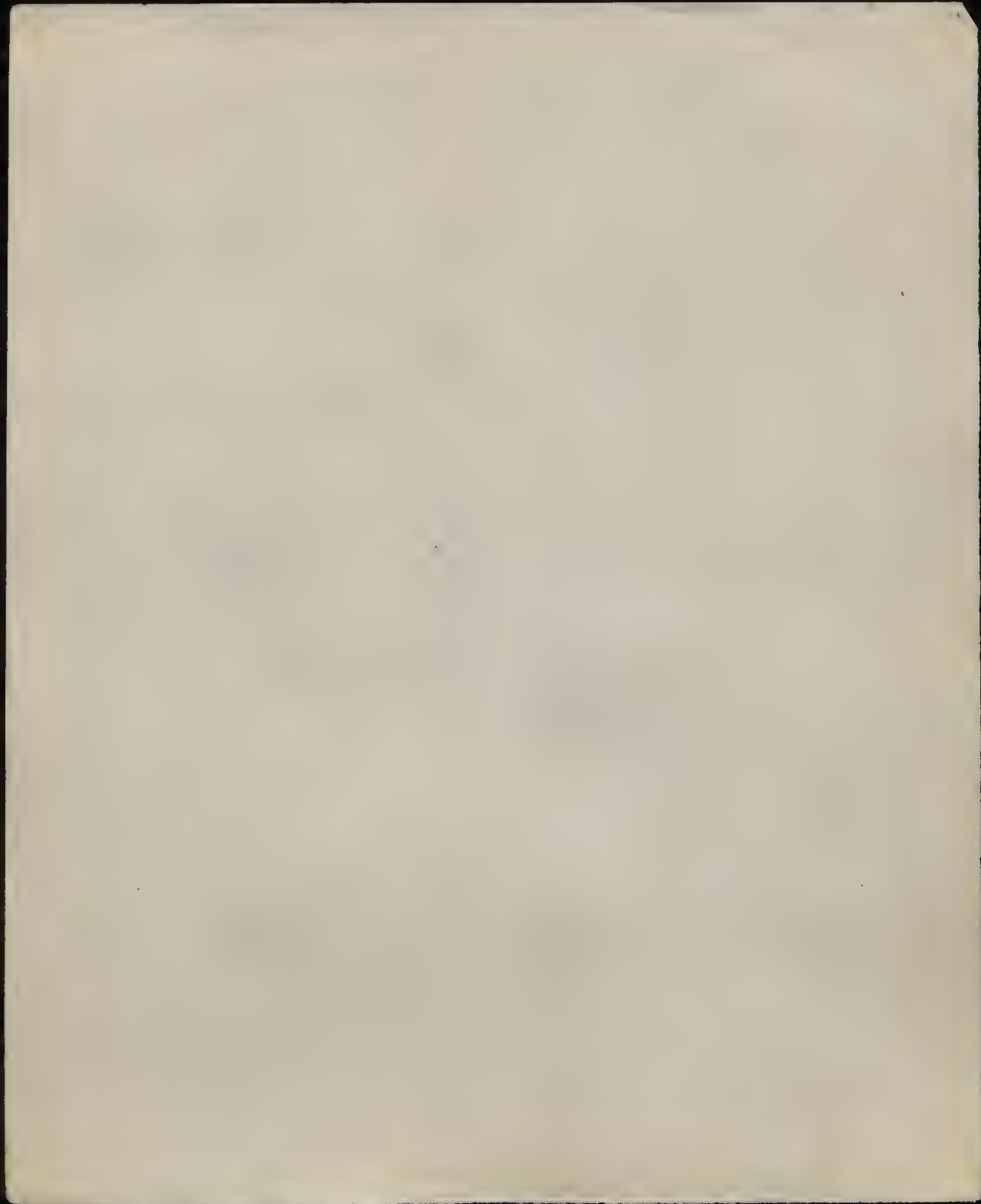
Tak samo takie jak przedtem pokazaliśmy dla prędkości stet
 i przypuszc. nadają ~~stet~~ nadają przyspiesz. w ~~krzywych~~ ^{krzywych} ~~nie~~ ^{jeżeli} ~~partie~~
 znajdują się w tej tej samego prawa równoległego boków lub ~~stet~~
 nadają wielokąt jak tam, t. j. przez geometryczne dodawanie.

Zróbte ewykle najłatwiej jest w ul. gradowania wartości przypuszc.
 na on współrzędnych x, y, z , a potem pojedynczo je zesumować i znowu
 jest tam stoją

3 rozmieszc.

Przeypięszenie ruchu wypadkowego z
 dwóch składowych ^{prędkości} równa się
 geometrycznej sumie przeypięszeń
~~składowych~~ (składowych
 prędkości).





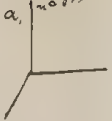
Wektor j, k
 $x + iy = z + i\rho$

$x = x$

$y = \rho$

$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

i, j, k wektory, których długość = 1 i kierunek

to znaczy że tych jednostek a_1, a_2, a_3 

zatem wektor

$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$v = a \cdot \vec{r} = \text{sum} v$

możemy pisać $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

lub $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

ale że w tym momencie myślimy o wektorze
 pochodzą z tego że chcemy mieć produkt wektorowy

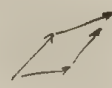
zatem + kierunek z tego samego

jeżeli wektory punktujemy w naszym kierunku = odległość



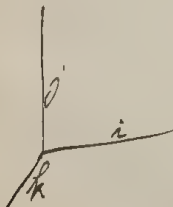
Upraszczając tu jest proste wektory prawo ~~o~~ dodawania: $v + w = w + v$
 charakterystyczne komut.
~~dystrybucyjność~~

$v + b = \text{nie} b + v$



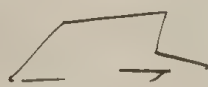
czyli długość wektora $v + w$ = długość sumy

$(v + b) + c = v + (b + c)$



$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Dodawanie wektorów składowych

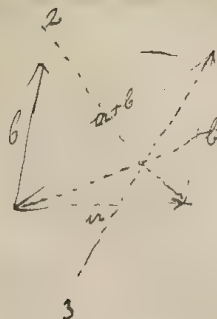


Suma wektorów
 (wektory nie będące zerem)

$v + b + c = (a_1, b_1, c_1, \dots) i + \dots$

Tak samo obliczanie

Ważne możemy tak powiedzieć: przy obliczaniu składowych wektorów: proste proste, suma



~~1 = 1/2 + 1/2~~

$$r_1 = \left(n + \frac{b}{2}\right) x$$

$$r_2 = n + y \left(n - \frac{n+b}{2}\right)$$

$$r_3 = n + b + 2\left(b + \frac{n}{2}\right)$$

$$\left(n + \frac{b}{2}\right) x = \cancel{n + \frac{b}{2}} n \left(\frac{y}{2} + 1\right) - b \frac{y}{2}$$

$$r = \cancel{1 + 1} n + b(1)$$

$$x = a_1 + b_1 u \quad \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3}$$

$$y = a_2 + b_2 u$$

$$z = a_3 + b_3 u$$

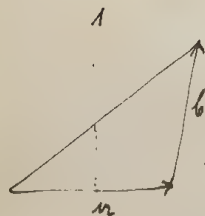
$$x = \frac{y}{2} + 1$$

$$\frac{y}{2} = -y = \frac{y}{2} + 1$$

$$\frac{3}{2} y = -1$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$r_1 = \frac{2}{3} \left(n + \frac{b}{2}\right)$$



$$r_1 = \frac{n}{2} + x[n c]$$

$$r_2 = n + \frac{b}{2} + y[b c]$$

$$r_3 = \frac{n}{2} + \frac{b}{2} + 2([n c] + [b c])$$

$$\cancel{[n b c]} = \cancel{2(n c) - c(n b)}$$

$$\frac{n}{2} + \frac{b}{2} + y[b c] = x[n c]$$

$$\frac{n b}{2} + y[b c] - x[n c] \quad \text{w4c jule} \quad y=2 \quad x=-2$$

da tau neu punkte

(n...)

$$\frac{n^2}{2} + \left(\frac{n b}{2}\right) + y(a[b c]) = 0$$

$$y = -\frac{\frac{n^2}{2} + \left(\frac{n b}{2}\right)}{(n[b c])}$$

$$\left(\frac{n b}{2}\right) + \frac{b^2}{2} = x(b[n c])$$

$$x = -\frac{\left(\frac{n b}{2}\right) + \frac{b^2}{2}}{(n[b c])}$$

2

Dziękuję:

19

$$\sin \bar{a} \bar{b} = ab \cos ab$$

$$\cos \bar{a} \bar{b} = ab \sin ab$$

$c \perp \bar{a}$
 $\perp \bar{b}$ w tym kierunku jest w.d. Taką sytuację mamy w kł.

$$\text{Zatem: } \sin rr = a^2$$

$$\sin ii = 1 = \sin jj = \sin kk$$

$$\sin ab = 0 \text{ jeśli } \bar{a} \perp \bar{b}$$

$$\sin ij = \sin jk = \sin ki = 0$$

Wiem, że jest to tak, ale
dziś nie mam czasu, żeby
mimo to i tak i wyprowadzić to, że
to, co to ogólnie jest.

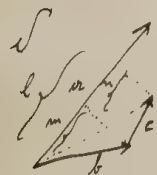
$$\sin \bar{a} \bar{b} = \sin (a_1 i + a_2 j + a_3 k) (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

To n.p. jest dowód trójkątowy:

$$ab \cos ab = ab (\cos ax \cos bx + \cos ay \cos by + \cos az \cos bz)$$

$$\sin ab = \sin ba$$

ponieważ $\cos ab = \cos ba$ ponieważ



$$\sin (b+c) = \sin b + \sin c$$

$$= a \sin b = a \sin c$$

niezależnie

Ale nie ma możliwości na prawo trójkątności (bo $\sin b \sin c$ nie ma znaczenia)
zatem nasze „mnożenie skalare” nie spełnia trójkątności - nie ma znaczenia.

$$\sin rr = 0 \quad \sin ii = \sin jj = \sin kk = 0$$

$$\sin ij = k = -\sin ji \text{ etc.}$$

$$\text{zatem } \sin ab = -\sin ba$$

$$[r[bc]] = x b + y c$$

$$(r[r[bc]]) = 0 = x(rb) + y(rc)$$

$$x = (rc)\alpha \quad y = -(rb)\alpha$$

$$= \alpha[(rc)b - (rb)c]$$

$$\parallel \frac{rc - rb}{b - c}$$

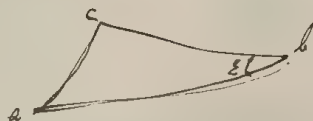
$$\alpha = 1$$

$$[r[bc]] = b(rc) - c(rb)$$

$$S(b[r[bc]]) = (b^2)(rc) - (bc)(rb)$$

$$= ([bc][br]) =$$

$$a = b = c = 1$$

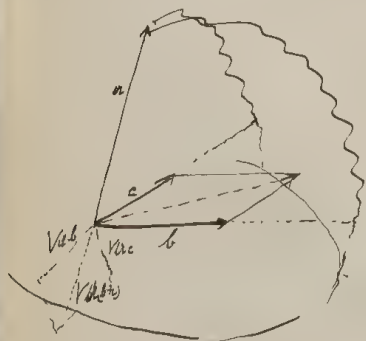


$$\omega rc = \omega rb \omega bc \neq \omega rb \omega bc \omega \epsilon$$

$$2\left(\frac{bc}{br}\right) = 2 - \epsilon$$

$$V_{ur}(b+c) = V_{urb} + V_{urc}$$

20



$V_{ur}(b+c)$ leży w płaszczyźnie $E \perp u$

dzieliąc przez a :

$$V_{ur}(b+c) = V_{urb} + V_{urc}$$

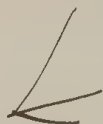
W tej samej płaszczyźnie tożsamość $V_{urb} + V_{urc}$

Zatem:

$$V_{urb} = V(a_1i + a_2j + a_3k)(b_1i + b_2j + b_3k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Wzrostowanie:

Ogólnie
wzrostowanie



$$= \int u \cdot Vbc = \int b \cdot Vcu = \int c \cdot Vub$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + \dots = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Końcówce równania $u=b$ zostają 3 równania: $a_1i + a_2j + a_3k = \dots$

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2$$

$$a_3 = b_3$$

Wzrostanie to jest w tym miejscu

3 równania analogicznie obliczamy dla 3 pozostałych

to możemy je zostawić jako 3 równania; można to po prostu zrobić z 3 równaniami tego samego typu

To przekształcić możemy w jedną! Przykład

Wzrostanie w tym miejscu jest w związku z tym, że mamy punktowanie w tym miejscu

z tym, że mamy punktowanie w tym miejscu

Wzrostanie to jest w tym miejscu. Ale nie ma punktu w tym miejscu

Two body problem

$$y = gt^2$$

$$x = at + ct$$

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$x = a \cos t \quad ct - r \sin \frac{ct}{r}$$

$$y = a \sin t \quad r \left(1 - \cos \frac{ct}{r}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = c - \sin \frac{ct}{r}$$

$$\frac{dy}{dt} = c \cos \frac{ct}{r}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \frac{ct}{r}}{1 - \sin \frac{ct}{r}}$$

↳ too many:
 gives 1 without other such as
 sup.

Zapoznawamy się teraz z pojęciami prędkości i przyspieszenia
możemy przystąpić do poznania zasad głównych ~~mechaniki~~ ^{inclusion} dynamiki.
Jaki już wspomnieliśmy, zostali one ~~wypowiedziane przez~~ ^{inclusion} przez
Newtona. Stwierdził on je ~~trzech zasadach~~ w trzech definicjach
1643-1727
1686 Def. 1. et. princip.
anot.

~~W~~ wziętych i trzech zasadach, t. zw. *legis motus*.
Definicje odnoszą się do pojęcia masy i siły.

Masa jest - tak mówi on - ilości materji, ~~która się znajduje~~ ^{określona przez ilość}
zestawionej i objętości, mierzącej się za pomocą ciężarowości. ^{ilości materji jest}
~~stamtąd spoczynku lub~~ ^{ilości z masy i przyspieszenia}

Siła jest dążenie do zmiany ^{stanu spoczynku lub} ruchu prostego, jednostajnego. ~~W~~
~~Stwierdzają~~ Trzy zasady będące jak. następujące:

I). Każde ciało zatrzymuje zachowuje swój stan spoczynku
lub ^{ilości} ruchu prostego, jednostajnego, ^{przekształca} jeżeli siły przyłożone nie
zmuszają go do zmiany tego stanu.

II). Zmiana ruchu jest proporcjonalna do ~~przebiegu~~ ^{przekształca} siły i
odbywa się w kierunku tej siły.

III). Ciało oddziaływa na siebie siłami równymi i skierowanymi
przeciwnie

Co do istoty tych praw i drinog^{im} nie możemy nic powiedzieć, i wiele
autorów i drinog^{im} jeszcze trzymają się ich dosłownego brzmienia.
m. p. Frank, Witkowski. Pod względem logicznej ścisłości w wypowiedzeniu
nie są one ^{jednak} bez zarzutu, i bardzo słuszną wydaje mi się krytyka
Macha i innych. Niewątpliwie definiują masę jako ilość materji

To pomoce tych okreslic jstestwo tierz takie w stanie ~~dy~~²³ mikrocy-
sty stoisowo. ~~Ktoz~~ Wyznamy we frzye tierz ojlunie tak
zwany system CSS [continua pram sekundy].

Przytępienie Pomieszczeń jak powyżej, ażeby mieć więcej miejsca tyłko
stomniaki mas, więc & pozostać nam zupełnie dozwolnić co do tego, co
nasycony mas, 1. ~~co~~ jako tego jednego, który przytępienie
mas
powyżej wymienionego ~~1~~ 1 cm^3 wody & przy temperaturze 4 stopni.

z tego już wynika, że przyspieszenie a jednostki przemieszczenia $\frac{1 \text{ cm}}{\text{sek}^2}$
A przysp. = 1 taki że zwiększa ono ~~prędkość~~ prędkość o 1 cm na sekundę.
Wzrost siły = 1 taka, która działając na masę 1 gram przyspiesza
ją prędkość o 1 cm ^{podczas} sek.

N. z. emang. Samon ludnia ze przeplyniem przy spadaniu cięci wynosi
980 cm (poćinij do tego wioru); wżę wte wżębori ^{t.j. wżę} wżębori wżębori
wynosi 980 jednostek wżę. $CG S^{-2}$

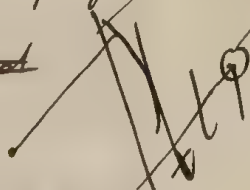
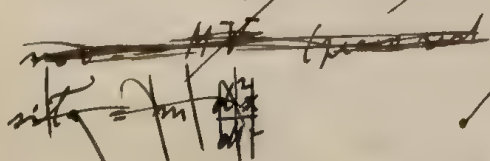
[illegible]

21
 iloczyn tych wzajemny zwągle "nadzwyczaj prosty sposób relacji od
 odległości w których ciota się znajdują. Tak n. p. ^{siła} grawitacji,
 siła sprężystości, siły elektrycznej i magnetycznej relacje tylko od
 odległości ciota od pewnego centrum ^{ciężkości} dristalności, tak że prawa
 fizyki nadzwyczajnie się uproszczają przez wprowadzenie tego pojęcia.
 Cennym ^{zgodnie} jest, cennym właściwie drugą pochodną drogi w tym samym
 odgrywa taką rolę, tego naturalnie nie wiemy. Fakt jest, że tak
 się rzeczy mają. Próbowano także wprowadzić w rachunki wyższe
 pochodne n. $\lim \frac{d^3 s}{dt^3}$ ~~i t.p.~~ jako siły wyższego rzędu, ale to
 się na nic nie przydało i wnt kompletnie zaniedbano dalszych
 prób w tej mierze.

Zanim przystąpimy do rozstrzygnięcia tych zasad ruchu na poprzednich
 przyczynkach, określmy jeszcze kilka pojęć ~~całkowicie~~ wielką rolę odgrywają-
 cych w mechanice.

Tak iloczyn $m \cdot v$ nazywamy pędem lub ilością ruchu.

Że pomocą niego możemy pożytkować zasady trochę krócej wyrazić się:



$$= m \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = m \frac{ds}{dt}$$

Do pojęcia siły rotacji nie należy zwracać uwagi na pojęcie "siły" w poprzednim
 - ~~ma~~ mian, siły magnetycznej, natężenia itp. Otrądo że pojęcie dristalności nie jest

z pomocą ~~nie~~ wzajemności międzywzajemnych, ale tym razem są to rzeczy doświadczonego faktu, które nie-
 podobnie, rotacja w fizyce opisywana jest wyjątkowo na okazywaniu ruchu partycularnych ciał doświadczonego faktu. Wygoda jest w. że siła magnetyczna $\sim \frac{1}{r^2}$ nie zmienia się w przemyśle jak siła, a nie zmienia, tylko że konstanty jak że przemyśle.

$$r^2 \left(\frac{a^2 \dot{\varphi}}{a^4} + \frac{r^2 \dot{\varphi}}{b^4} \right) = 1 = r^2 \left(\frac{1}{a^2} + r^{-2} \varphi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right)$$

$$1 = \frac{r^2}{a^2} [1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi]$$

$$2r \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \quad r^2 = \frac{a^2}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$$

$$2r \frac{dr}{dt} = \frac{a^2}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2} 2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \frac{r^4}{a^2} 2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{a^2} \sin \varphi \cos \varphi \cdot c \varepsilon^2$$

$$\frac{dr}{dr^2} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi \cos \varphi \frac{c \varepsilon^2}{a^2} + r \left(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt} \frac{c \varepsilon^2}{a^2}$$

$$= \frac{r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi c^2 \varepsilon^4}{a^4} +$$

$$\frac{dr}{dr} = \frac{c^2 \varepsilon^2}{r a^2} \left\{ \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\varepsilon^2} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \varepsilon^2 \right\}$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

$$2r \frac{dr}{dt} \left(\frac{r^2}{a^2} \right)^2 = \dots$$

$$\frac{(a - \varepsilon)^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{dr}{dt} - r \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = - \frac{c^2}{a^4 (1 - \varepsilon^2)} r$$

to same work body is in many
shadows v x y:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{x^2 + y^2} = m \frac{a^2}{r} \\ \text{pyram } v &= \frac{1}{2} \frac{a^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{2} = \frac{ab \alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{a^4 (1 - \varepsilon^2)}$$

we must identify!

Ruch ciała spadającego jako krzywoliniowy przypadek ruchu planet

$$1). \text{ Włosa } \left(\frac{a-\xi}{a}\right)^2 + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 = 1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}$$

$$\xi = \frac{\xi^2}{2a} + \frac{\eta^2 a}{2b^2}$$

~~ciężkie~~
o ile a bardzo duże

$\frac{\eta}{b}$ składowa, redukując to do

$$\xi = \eta^2 \frac{a}{2b^2} \quad \text{parametr } p = \frac{b^2}{a}$$

podnosząc dla ciała naszego parametry: $\xi = p \frac{\eta^2}{2}$ $\eta = \xi t$

$$\xi = \frac{p}{2 \xi^2} \eta^2 \quad \text{czyli} \quad \frac{a}{2b^2} = \frac{p}{2 \xi^2} = \frac{\xi^2}{p}$$

2). Ruch ciała po krzywej stałej $\xi R = \text{const}$ $R = \text{promień ziemi}$

3). Ciepło obrotu nie zmienia, ale

$$\frac{T^2}{a^3} = 2 \quad \text{wynik}$$

$$F = -\frac{4\pi^2}{\lambda} \frac{m}{r^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 p}{c^2}$$

$$\omega_0 \text{ obrotu} = \frac{4\pi^2}{C^2 R^2} \frac{C^2}{g} = \frac{4\pi^2}{g R^2}$$

$$F = -\frac{4\pi^2 m}{r^2} \frac{4\pi^2}{g R^2} = g \frac{R^2}{r^2}$$

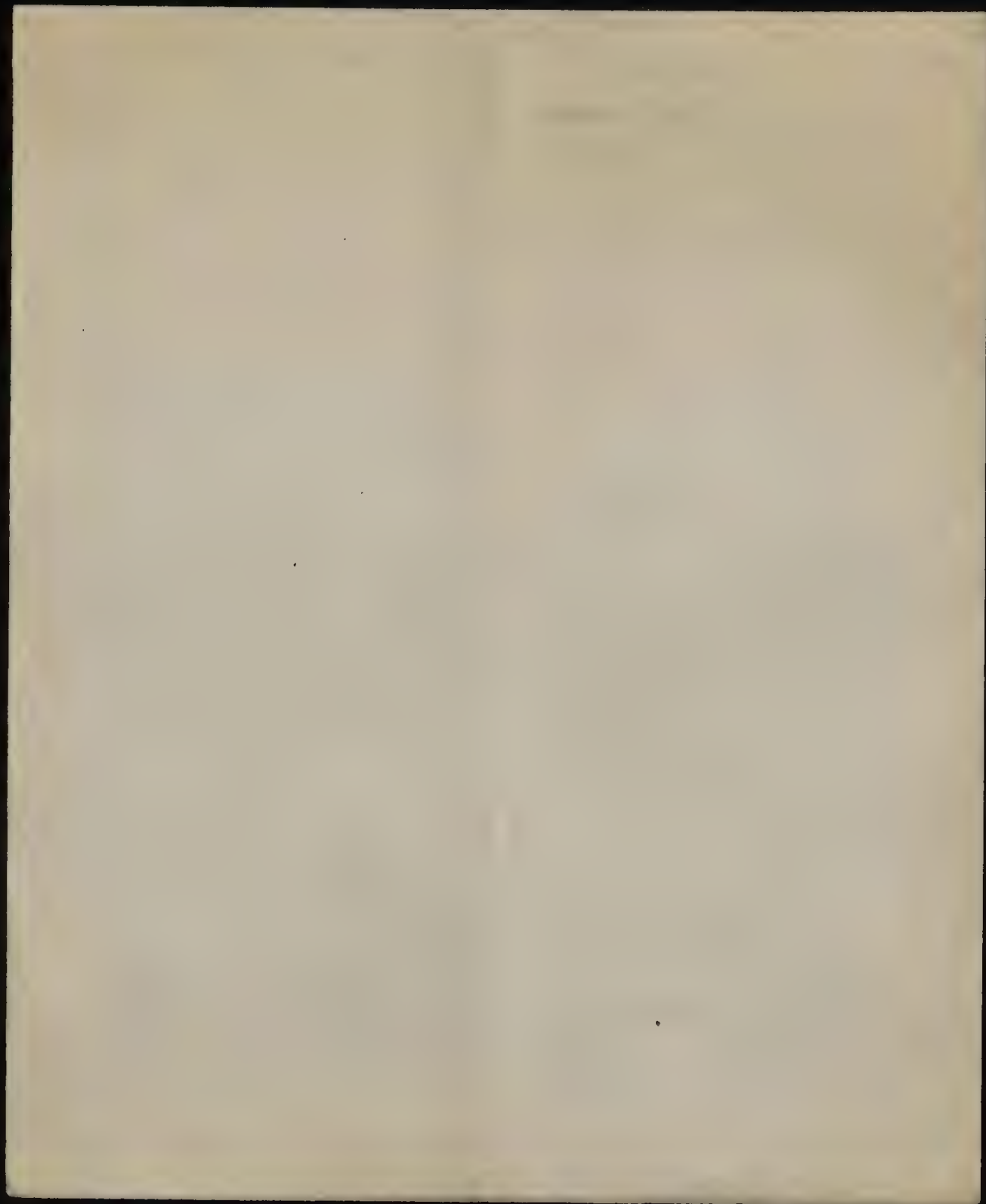
czy promień krzywizny naszego obrotu \neq !





27

dwójnym geometrycznym wektor b do a , przyłożymy do końca a wektor równoległy
do b i odpowiednią długości; ~~z tego~~ wektor łączący punkt wyjścia a z punktem
końcowym tego otrzymanego jest to co nazywamy sumą $a + b$.

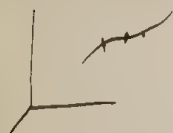


Mechanika punktu
Kinematyka

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

Wzrost przyrządu (osi & drucie, umocowane na szlaku)
dokładny chronometr

3 kule ułożone w prostolinię
& równoległe do kierunku dróg
Pomiar!



Prędkość przy ruchu jednostajnym = $\frac{\text{droga}}{\text{czas}}$

Wzrost & kąt, czyli
na osiach ułożone
punktów trzech
składowych

Oznaczenia prędkości $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt}$

już istnieją linie
innych ruchów nieregularnych

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= b + ct^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Najprostszy przykład ruchu punktu & prędkości & składowych.

Co to znaczy ruch jednostajny?

W każdym chwili równoważne ruchy składowe myślenie zasady równowagi
adeguately geometrycznej.

To jest prawo bardzo ogólne stosujące się do jakiegokolwiek wektora.

Ekspres w rachunek wektorowy. (które będąc tutaj niejasne i są jako składowe części do dokończenia)

Wektory, składowe Siły mogą być jakiegokolwiek wielkości przy czym pierwsze mają pewną
długość, czy to wektor czy skalar?

Do składowych ruchów arytmetycznych

Do wektorów geometrycznych, albo wielkości geometrycznych & rachunek wektorowy.

~~Wektor~~ Wektor oznacza prędkość: kierunek & 3 wielkości

(lub wygląda na prędkość)

równanie $u = b$ odpowiada zatem 3 warunkom





Hammer & wiktoria liab^m stuzna si wiktoria rownolitych ale m rozny toki druz. 29

Bridge

not.

Wzajemne tch² symbolow mowimy teraz wch punktu przedstawic:

$$r = f(t) \quad \text{dla} \quad \begin{aligned} r_1 &= f_1 \\ r_2 &= f_2 \\ r_3 &= f_3 \end{aligned}$$



$$r_2 - r_1 = f(t_2) - f(t_1) = \text{wyrazo}$$

$$\frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \text{predkosc' pami}$$

$$\frac{dr}{dt} = \text{predkosc' wktowna}$$

Przyklady skadania ruchow:

Gato rucone (nadajce w wagonie kolejowym)

obliczaj predkosc i przyspieszenie

Przyklady (zobacz) - klikaj punktach mierzonych toz (dla wyzszego sie zdaniem i to mierzona!
dla wyzszego sie zdaniem i to mierzona!
stety dwoch sfer + wiktoria

Egz. 2.10

Ozone ruchy planet

wilki odkrycie kopernika: najprostsze wktowienie tych ruchow!

modely - f. to porowna: a nasz skadanie jzko ruchow

Takie wktowienie czasem bardzo skomplikowane np. z obserwacji

toz jesto nadaje ych endosi ich ruch skadany, bez wplytu na ziemie.

Tyzy jesto podrozny

Najle dla mechaniki najprostsze i prawie jzko do skutku jzko do skutku jzko do skutku

Astronomia daje najswietlajscie dowody na mechaniki. I inne mow ule wach.

Wch ruch w skadaniu:

$$r = f(t)$$

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \alpha - r \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

} Skadaj ruch w kierunku z i przyspieszenie

$$\frac{dx}{dt} \cos \alpha + \dots = \frac{dr}{dt}$$

$$\left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \dots$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_{\perp r} = r \frac{d\alpha}{dt}$$

Takie bezposrednie przyklady

$$v = r R$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = R \frac{dr}{dt} + r \frac{dR}{dt}$$

$$r = f(t) = ix + jy + kz$$

(kierunki i, j, k niezależne)

$$v = \dot{r} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt} = v \hat{v}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$= \frac{ds}{dt}$$

ogólnie znane własności dodawania geometrycznego!

$$v = \frac{dv}{dt} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$v = v \cdot \hat{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{dt}$$

$$v \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\hat{v}}{ds}$$

$$= v^2 R$$

$$= v^2 \frac{R}{R}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{t+\Delta t} - 2v_t + v_t}{\Delta t^2}$$

Różnica podwójna: 3 1!

$$r = ix + jy + kz \quad (m) = x \text{ itp.}$$

$$r = i(m_i) + j(m_j) + k(m_k)$$

$$v_x = v \cos \varphi + v_y \sin \varphi$$

$$v_y = v \sin \varphi - v_x \cos \varphi$$

$$v = \dot{r} = R(\dot{r} \hat{v} + r \frac{d\hat{v}}{dt})$$

$$v = \dot{r} = R(\dot{r} \hat{v} + r \frac{d\hat{v}}{dt}) = R(\dot{r} \hat{v} + r \frac{d\hat{v}}{ds} \frac{ds}{dt}) = R(\dot{r} \hat{v} + r \frac{d\hat{v}}{ds} v)$$

$$= \frac{R}{h} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{h}$$

Tężenie wodopię

Wzrost

Wzrost

30



Jedną z tych to i wodopię to drugą już z jakiegoś punktu (czyli toż) przedkładać w kierunku ~~tego~~ w prawo

Bez wodopię w tym kierunku nie ma możliwości przedkładać.

~~Wzrost~~ ^{zwiększenie}

Przechodząc po kole jest ruchem o zmiennym prędkości (bierze to kierunek w sensie wektora) i przyspieszenie ma co do kierunku prz. ale co do wartości prędkości.



Tężenie przyspieszenia:

(całkowite)
= (średniemu prędkości w ruchu wektorowym)

- 1) Prędkość początkową
- 2) Prędkość końcową

(wyznaczenie czasu określone położenie 3 punkt. bliskich siebie)



Różnica tych prędkości = przyspieszenie prz. całe = przysp. przyspieszenie

chwila i dla wartości wektora przyspieszenia

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1 - d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Oznaczenia prędkości można także wykonać w sposób

inny np. w trzech kierunkach osi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_3}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_3}{dt} \end{pmatrix}$$

i stąd - są równości: $v_1 = v_1$, $v_2 = v_2$, $v_3 = v_3$

to 3 równ. prz.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

chwila przysp. kierunku stycznej do wodopię

aby było ~~istotne~~ ważne składowe i wektowe

też samo jak prędkości: wektory zostały dodawane wektorowo (ponieważ to są równ. wektorowe)

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Kennell Pgs 131 to 137 (1868)



1). Ruch punktu jest prosty w tym samym kierunku (drogi)

2). Ony krzyż może krążyć prosty, ma kierunek inny niż styczny

Np. jednocześnie może go krążyć = przyspieszenie; kierunek \perp

Składowa \perp przyspieszenia nie styczny krzywej przyspieszenia tylko sumowa kierunek

2. zadanie właściwie prosty, w Składowa \perp kierunku drgi: \perp

$$= \frac{dx}{dt} \cos \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \alpha$$

Dla porównania!
a to przyspieszenie 3 punkty
przebiegać i składowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \sin \alpha + v \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\text{w kierunku drgi: } \frac{d^2x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$\perp : -\frac{d^2x}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2y}{dt^2} \cos \alpha = v \frac{d\alpha}{dt}$$

Wyprowadzenie przyspieszenia

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(v \frac{d\alpha}{dt}\right)^2} \text{ w tym kierunku}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \frac{v}{R} \leftarrow \text{promień krzywizny}$$

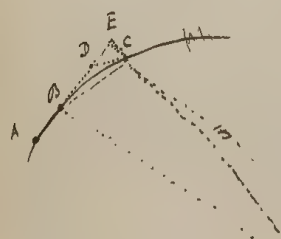
$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R}$$

Także geometrycznie: $AD_{\text{środek}} = \text{promień}$

$\frac{DC}{\Delta t^2} = \text{prost.} = \text{wskazywanie w kierunku } \perp DC \text{ i } \parallel C$

$$\frac{DE}{\Delta t^2} \quad \frac{EC}{\Delta t^2}$$

$$\frac{DE}{\Delta t^2} = \frac{DC - AD}{\Delta t^2} = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t} \cdot \frac{dv}{dt}$$



$$\frac{EC}{\Delta t^2} = \frac{(DC)^2}{R \Delta t^2} = \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Wektory: } \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \frac{dr}{ds} = v \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= v \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= v^2 \frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R}$$



$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_t = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_r^2 = \frac{dr^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

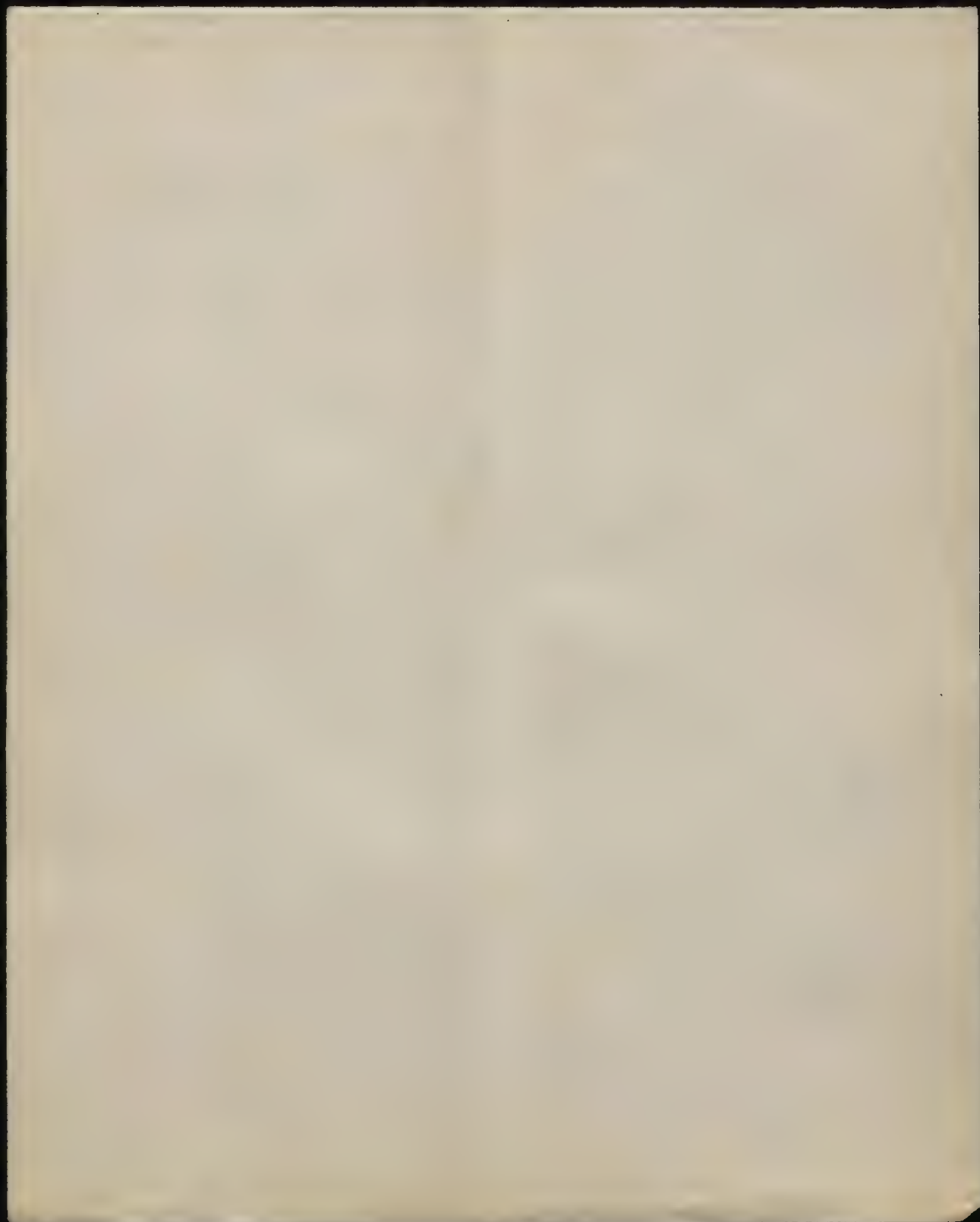
$$v_t^2 = \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

Wynik to nieporadnie nudy : pomyś. state = g w europeu se staly se opierali
Ale dopiero Newton pomyś. se w swoim pomyś. dla wyn. tych nudy.

~~Principia philos. mathematicae~~ Philosophiae naturalis principia mathematica. 1686

Natural philosophy! Filosofia przyrody = fizyka

~~Principia~~ 4 Definitions i 3 laws motion



Przypisaniu w kierunku promienia R i \perp

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{v \cos \varphi} \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad \left| \frac{dy}{dt} = \dots \right.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - 2 \frac{dr}{dt} r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - r \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \sin \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \left| \frac{dy}{dt} = \dots \right.$$

$$w_r = \frac{dr}{dt} \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \sin \varphi = \frac{dr}{dt} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$w_\perp = \frac{dr}{dt} \sin \varphi - \frac{dx}{dt} \cos \varphi = 2 \frac{dr}{dt} \frac{dy}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

Na ten końcowy etap kinematyki punktu, ponownie, tak będzie drogą zmian do kinematyki kinematycznych.

Dynamika punktu.

Porządku: Dodania Goldsteina nad nadaniem wst. V. Wymagania c.d. podaje z równowagą

Technika doświadcz. przyjmujemy więc naszymi, teoretycz.

~~Doświadczenie~~ Ruch ciała ruchem uogólnionym; pierwiastek hipotetyczny ~~prędkości~~ $\sim s$

$$\frac{ds}{dt} = a \cdot s \quad \text{z tego wynika uogólnienie} \quad s = s_0 e^{at}$$

czy nie mógłby raczej być powołany z punktu 6

Druge hipoteza $\frac{ds}{dt} = a \cdot t$

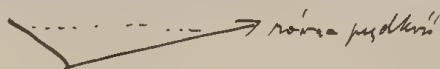
$$s = a \frac{t^2}{2} + b \quad \text{to jest możliwe rezultatem ale czy prawda?}$$

Doświadc. stwierdzenia doświadczenia zjawiska równi pochyłej Stwierdzone dośw. przy spad z równi pochyłej w Pire

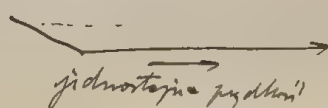


$$s = g \sin \varphi \frac{t^2}{2} \quad \text{to } \sqrt{\frac{2s}{g \sin \varphi}} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh}$$

Druga uogólnienie mamy rozmaite problemy doświadczenia zjawiska.

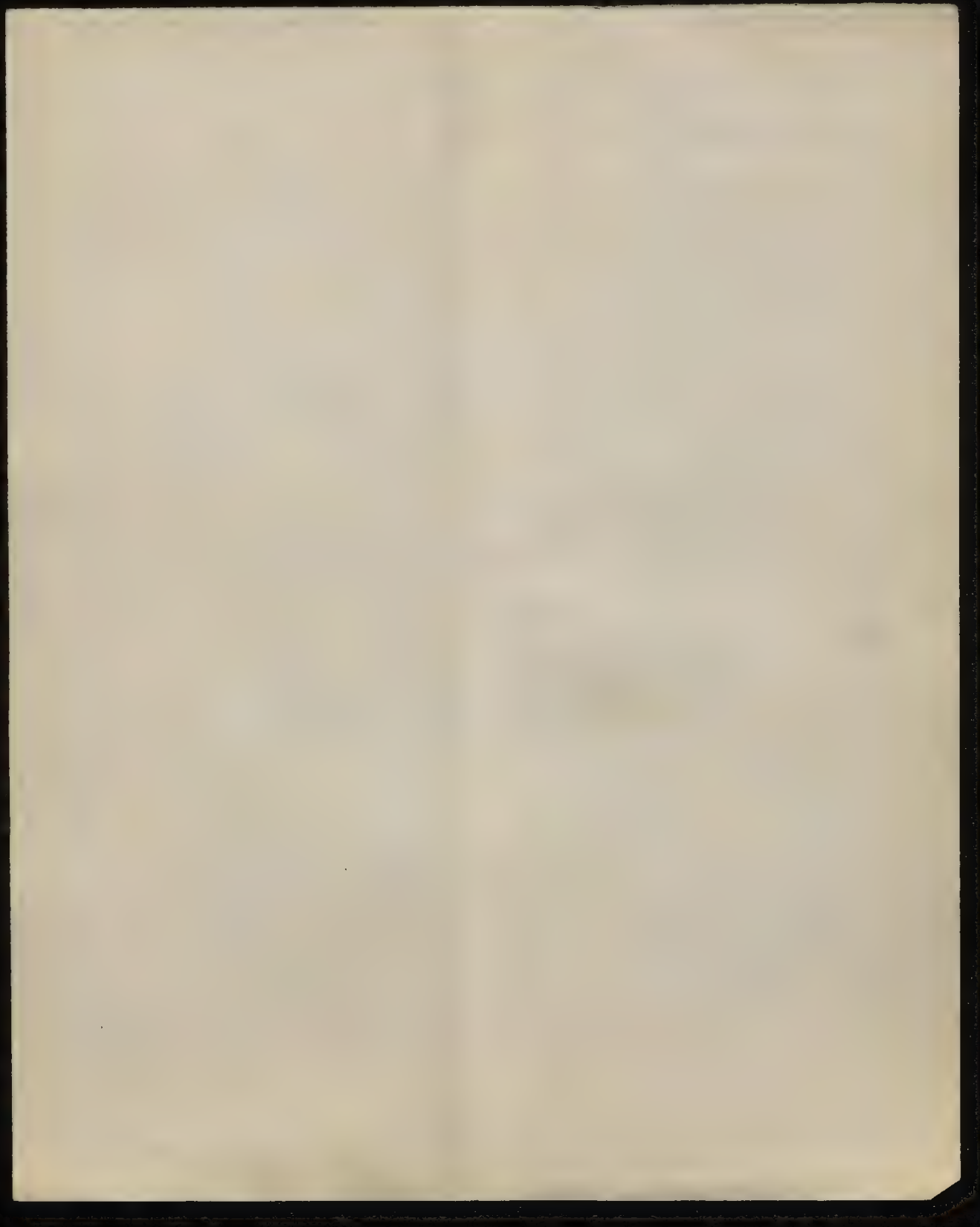


równa prędkości



jednostajnie prędkości

Tak dochodzi do zasady bezładności (przejawiającej się w tym spec. przypadku)
To samo przypadek potrafi dla wielu warunków: że ruch po równi trwa a uogólnienie nie uogólnienie



$$1). \quad X = -\frac{\alpha}{x^2}$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \beta - \frac{\alpha}{x}$$

$$2). \quad X = +\alpha x$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a - \frac{b}{x}}} = dt$$

$$3). \quad X = mg - \beta \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{x} = y$$

$$4). \quad X = -\beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - \frac{b}{x}}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{ax - b}}$$

$$ax - b = y$$

$$x = \frac{y+b}{a}$$

$$= \int \frac{\sqrt{ax^2 - bx} dx}{ax - b}$$

$$\int \frac{dy}{y \sqrt{a - \frac{b}{x}}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 - bx}}$$

$$= a \sqrt{ax^2 - bx} + \int \frac{b dx}{\sqrt{ax^2 - bx}}$$

$$= \int \frac{dy}{ay} \frac{\sqrt{y(b+y)}}{a} = \int \frac{dy \sqrt{y+b}}{y}$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = a + bx^2$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = dt$$

$$\int (x + \sqrt{a + bx^2})$$

$$\frac{dv}{dt} = a - bv$$

$$\frac{dv}{dt} = -bv$$

$$\int (a + bx^2)$$

$$\frac{dv}{v} = -dt$$

$$a - bv = c$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} t$$

$$\sqrt{\frac{dx}{dt}} = a + b \frac{1}{v}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{b + at}$$

$$x = (A + t^3)^{1/3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} (A + t^3)^{-2/3} = -\frac{A}{3} \frac{1}{x^2}$$

$$\text{when } a=0 \quad \sqrt{x} dx = dt$$

$$\sqrt{a - \frac{b}{x}} =$$

$$x = a(\phi - \sin \phi)$$

$$\phi = ct$$

$$y = a(1 - \cos \phi)$$

$$\dot{x} = ac(1 - \cos \phi)$$

$$\dot{y} = ac \sin \phi$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2a^2c^2(1 - \cos \phi) = 2ac^2y$$

$$\dot{x} = ac^2 \sin \phi = c^2 \sqrt{1 - (1 - \frac{y}{a})^2} = c^2 \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\dot{y} = ac^2 \cos \phi = c^2(a - y)$$

} *Let's interpret values!!*

~~Wzrost~~
~~z hmoty~~

ale mod'ly h'by tie vime pome $\dot{x} = \beta_1(x, y)$
 $\dot{y} = \beta_2(x, y)$

more tie p'at' u'at' p'at' d'g?

Wzrost ~~z hmoty~~ ch'ce ch'bi' pole sily { t'mba v'at' m'no'ie p'or'ona'ia d'g' d'ig' y'm' v'm'k'ame
p'at' d'ig' y'm' v'm'k'ame

Est'm sily v'at' y'm' v'm'k'ame sily sily p'at' d'ig' y'm' v'm'k'ame

N.p. v'at' y'm' v'm'k'ame $X = ac^2 \frac{act - x}{a}$

$$Y = ac^2 \frac{a - y}{a}$$

many te same sily v'at' y'm' v'm'k'ame

p'at' d'ig' y'm' v'm'k'ame $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

Pot'm'g' : $c^2 [actx + ac^2y - \frac{c^2}{2}(x^2 + y^2)]$

Tok same n'ch p'arab'ol'any

$$x = ct$$

$$y = g \frac{t^2}{2}$$

more p'at' d'ig' y'm' v'm'k'ame

$$X = 0$$

$$Y = mg$$

also tie v'at' y'm' v'm'k'ame $X = 0$

$$Y = m \cdot \frac{2y \cdot c^2}{x^2}$$

v'at' d'ig' y'm' v'm'k'ame $\frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x}$

h'b $X = \frac{2y}{g} - \frac{x}{c}$

$$Y = mg$$

Jżeli jednak znamy ogólne wyrażenie w zależności od danych początkowych

35

$$x = a_1 + c_1 t$$

$$x = c_1$$

$$y = a_2 + c_2 t + g_2 t^2$$

$$\dot{y} = c_2 + g t$$

$$m \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \right) = \frac{m}{2} [c_1^2 + c_2^2 + 2c_2 g t + g^2 t^2] \text{ to znów da nam wyrażenie jak w}$$

$$L_{x_1} - L_0 = m g [c_2 t + g_2 t^2] = m g (y - a_2)$$

czyż nie da nam istotnie wyrażenie w innej formie [nie zawiera już stałych danych c_1, c_2]

Ta sama kwestja jest przy ruchu prostoliniowym z p. 2 oporu

Dozwolę $x = a e^{-\alpha t}$

to musi powstać z równ. oporu $X = -m \alpha \dot{x}$

$$\dot{x} = -\alpha a e^{-\alpha t}$$

lub z równ. potencjalnej $X = m \alpha^2 x$

$$\ddot{x} = \alpha^2 a e^{-\alpha t}$$

Jżeli ogólne wyrażenie:

$$x = b + a e^{-\alpha t} \quad \text{w którym } a, b \text{ dowolne stałe}$$

to $L_{x_1} - L_0$ nie da nam wyrażenie w formie $= f(x) - f(0)$ bez uproszczenia wartości a, b

podczas gdy wyrażenie

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x$$

$$x = a e^{\alpha t} + b e^{-\alpha t} = \frac{c}{2} e^{\alpha t} + b(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

$$\dot{x} = \alpha [a e^{\alpha t} - b e^{-\alpha t}] \quad (a-b)\alpha = c$$

$$a = b + \frac{c}{2\alpha}$$

$$x_0 = 2b + \frac{c}{2\alpha}$$

$$b = \frac{x_0}{2} - \frac{c}{2\alpha}$$

$$a = \frac{x_0}{2} + \frac{c}{2\alpha}$$

$$\dot{x}^2 = \alpha^2 [x^2 - 4ab]$$

$$\dot{x}^2 = \alpha^2 [x^2 - x_0^2 + \frac{c^2}{\alpha^2}]$$

$$\dot{x}^2 - c^2 = \alpha^2 (x^2 - x_0^2)$$

czyż tutaj da nam wyrażenie po

$$\ddot{x} = \alpha^2 x$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \alpha^2 \frac{x^2}{2} + \beta$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}} = dt$$

$$\ln(\alpha x + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}) = t + c$$

$$\alpha x + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2} = A e^{\alpha t}$$

$$\beta^2 + \alpha^2 x^2 = \cancel{x^2} + A^2 e^{2\alpha t} - 2 A \alpha x e^{\alpha t}$$

$$x = \frac{\cancel{A^2 e^{2\alpha t}} - \beta^2}{2 A \alpha e^{\alpha t}} = \frac{1}{2} \frac{A}{\alpha} \left[\frac{\alpha t}{2} - \frac{\beta^2}{A^2} e^{-\alpha t} \right]$$

to samo co punkt

Tę próbę nie czy (nieodwrotność 2 punktów postronny (i punkt wyjścia?)) ~~nie ma energii~~

czy trzeba dwa punkty minimalne:
(nie ma energii składowej 2 punktów po)

Jako tak, to istnieje punkt l.

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} - m \frac{\dot{x}_0^2}{2} = f(x) - f(x_0)$$

$$m \ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{czy wystarczą pochodne 2 punkt(0)?} \quad m \frac{\dot{x}^2}{2} = f(x)$$

Ony nie 2 uogólnienia to nie wystarczą! Oni nie mogą być tylko minimalne
wskazać pochodni postronnych tak aby posiadać krzywą przechodzącą przez punkt i dany.
całkowicie!

Wtedy trzeba się uciec do większej liczby uogólnień, na dowolnych krzywych przechodzących
przez dwa punkty.

Prin care marea majoritate a tinerilor erau de confesiune catolică, minoritatea fiind de evreii.

Przebieg nasz objawia się powiększeniem do 10-12 cm, mniejsze żółte białaczki
Przy tym samym do zastawienia nowych zasad mechanizmów do 22
nowych przysposobień. 36

To pierwsze badajmy bliżej ruch prosty (przodowanie).

Jeżeli ruch odbywa się w kierunku prostym, możemy w ten sposób
polażyć o ^{obrotach} ~~ang.~~ ^{obrótach} ~~prędkości~~ X , więc $v = \frac{dx}{dt}$, przysp. $w = \frac{d^2x}{dt^2}$

z definicji naszej siły wynika wtedy prawo Newtona:

$$m \frac{dx}{dt} = f \quad \text{co totake možemo naprati}$$

$$f = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m v)$$

[Impulsgröße, Quantität des momentums]
 also: Impuls hat jede. Bewegung wise

Stosunek mas woszu normalnego i stopionego lub przeciwnie. Stosunek wagi

Stacya mu musi normy
takie wypowiedzieć w tym wypadku rozady Newtona tzn. stowami:
sita równo się zmieniają podu, podobnie jak przez odpowiedni pręciwy uosn,
(lub też " " " " " podzes jednoworthki uosn)

Colony - rozstrymany:

$$m \frac{dx}{dt} \Big|_0^t = \int_0^t f dt$$

Iskili ta sama site dricla na inuz max M:

$$\int f dt = M(v_t - v_0)$$

Jakie to ciał. \int skł. otrzymało odnie. nowisko: popęd był impuls;
powinny więc: zmiany pędu równa się powodzi

23) Jeżeli przysiężnik jest w położeniu ($t=0$) ~~stały~~ punkt ~~niemal~~ był w stanie spoczynku $v_0=0$, wtedy $p_0 = p_0$

Z drugiego równania wynika: jeżeli siła ta sama działa ^{na różne masy} (podróżnik) tegoż samego czasu, wtedy jednakowo w nich wybudza prędkość.

Jest to pojęcie korzystne mianowicie przy zbadaniu siły, tak zwanych chwytliwych. Tak nazywamy siły — stałe albo zmieniające się — które działają tylko przez bardzo krótki przedział czasu. N. p. przy eksplozjach, przy uderzeniu ciała o sieć. Wtedy wyzyska siły są zmieniające ale nie znamy dokładnie prawa, ~~podlegającego~~ którego się zmieniają, ale o to nam tu nie chodzi, wystarczy jeżeli znamy ostateczną zmianę prędkości przez nie wywołaną która będzie $\frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_1} f dt$ więc jeżeli znamy wielkość pędu.

Tu tworzymy całkę z siły ~~i elementarną~~ działającą pod tym samym czasem. Również możemy utworzyć całkę z siły działającej na pewnej drodze t. j. całkę

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{x_0}^{x_1} m \frac{dv^2}{dt^2} dx = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{x_0}^{x_1} \quad \left\| \text{bo } 2 \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d \left(\frac{dx}{dt} \right)}{dx} \right.$$

$$= 2 \frac{dv^2}{dt^2}$$

$$= \frac{m}{2} v_1^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

Ta całka iloczynem z siły i drogi na którą ona działa, ma zatem wielkie znaczenie, nazywamy ją ^{wykonaną} pracą zobojętną przez siły na drodze z x_0 do x_1 .
(Arbeit, travail, work)

A ilorazem $\frac{m}{2} v^2$ nazywamy energią kinetyczną. [L.K. vis viva
energia kinetyczna
kinetic energy]

25
37

Mamy więc rezultat nadwoznej wsiury:

[Różnica energii kinetycznej ^{w dwóch} punktach równa się pracy wykonanej na drodze między tymi punktami.]

Różnicę pozmiany nadwoznej wsiury dołożenie tej zasady dla ruchu ~~dozwolonego~~ krzywego.

~~Przyjmijmy~~ Jak punkt już wspomnian ~~przebiega~~ ^{szkiele} siła f jest energią jako funkcją odległości x . Wtedy więc ~~podstawiamy że~~ całka $\int f dx$ będzie ~~niektórą~~ taką funkcją $x = -F(x)$

Mamy więc: $\frac{m}{2} v^2 + (-F(x)) = \frac{m}{2} v_0^2$

$$\frac{m}{2} v^2 = -F(x) + \text{const}$$

$$\frac{m}{2} v^2 + F(x) = \text{const}$$

$F(x)$ nazywamy ~~kinetyczną~~ energią potencjalną

mamy więc rezultat: Suma energii kinetycznej i ~~potencjalnej~~ potencjalnej pozostaje stała. (Ale tylko jeżeli użyjemy tego funkcja $F(x)$, o czym później)

Podobnie jak punkt wyśledzimy ~~siłę~~ ^{podm} f jako pochodną ~~prędkości~~ prędkości ~~w tym~~ ^{zatem} tak tutaj mamy $f = \frac{d}{dx} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = m v \frac{dv}{dx} = m x \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx}$

siłę więc pochodną energii kinetycznej, lub ujemnej pochodnej energii potencjalnej wzdłuż drogi.

Je to pojęcie pomocnicze, które czasem znacznie upraszcza rozumowanie Descartes i Newton przeważnie postępowali się ^{podm} w rozumowaniu i uważali je jako wielkość fundamentalną mechaniki, Leibniz Angelo

przebiegu wywołali energii w ten sposób. Mógłby tużi dawać
partycjami długi trwał spór podnoszą 17 go i 18 go wieku, że dółko
wstrząsnął i że nie mógł być nie mógł racji, ponieważ ~~ani po dani~~
można uwieść z tym samym prawem że lub energii jako charakteryst-
tyczną cechę ruchu i zaliczyć do od zadania, które w dany razie były niez-
zależne. Z tego wynika stąd również że ^{poziom} ~~przebieg~~ energii ~~widoczny~~ jest wartości.

Do tych ogólnych rozważań przjdąmy do kilku zadań szczególnych

Zadania mechaniczne można podzielić na dwie klasy:

Albo ruch jest dany jako funkcja czasu etc. i mamy wyznaczyć
siły które go spowodują — zwykłe zadanie statyczne które
ponieważ ~~prawa~~ rozróżniane zależność równowagi — albo
siły są dane i trzeba ^{znaleźć} ~~znaleźć~~ ruch, który w skutek nich
powstanie — zadania daleko trudniejsze, bo doprowadzające do
całkowania — i tużi najwięcej bydlennym się zatrudniali.

$$1. \quad x = \text{wskaz} a + bt$$

$$f = 0 \quad (\text{bezwładności, tarcia, inercja})$$

$$2. \quad x = a + bt + ct^2$$

ciężar ~~nie~~ ^{jednostki} ~~ciężar~~ ^{tego rodzaju} jest ruch

$$m \frac{dx}{dt} = 2mc$$

współstała stała jednostajna.

$$2c = 980 \text{ cm} = g$$

Doświadczenie że cięta tak samo
prędko spada jak g to samo.

$$f = mg \quad \text{współstała grawitacji proporcjonalna do masy ciała}$$

Na tym polega mierzenie masy (albo wleścinie porównawanie
masy) za pomocą wagi.

ośrodek przyciągania

Stwierdzenie
przegląd

$$3). x = (At + B)^{\frac{2}{3}}$$

26

38

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{2}{3} A (At + B)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2}{9} A^2 (At + B)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9} A^2 \frac{1}{x^2}$$

$$wzgl. mla = -\frac{2m}{9} A^2 \frac{1}{x^2}$$

B). Dane prawo siły; i opisać tego dla wyznaczenia stałych
dwa warunki początkowe lub graniczne.

Najbardziej ogólny przypadek: siła jako funkcja czasu

$$1). \ddot{x} = t^n$$

$$\dot{x} = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + a$$

$$x = \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + at + b$$

dane albo pożytych punktów sta
w dwóch momentach albo w
jednym momencie pożytych i przydłuż
do wyznaczenia stałych.

$$\ddot{x} = f(t)$$

$$\dot{x} = \int f(t) dt + a$$

$$x = \int dt \int f(t) dt + at + b \quad \text{n.p. } f(t) = g \quad !!$$

2). Złoty przypadek: siła jako funkcja miejsca

$$\ddot{x} = x^n$$

$$\text{n.p. } x=0 \quad \dot{x}=0$$

$$t=0 \quad x=0$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{x^{n+1}}{n+1} + a$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$x^{\frac{2}{n+1}} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} dt$$

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}} t + b = \frac{x^{\frac{n+3}{n+1}}}{\frac{n+3}{n+1}}$$

27

$$\ddot{x} = f(x)$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \int f(x) dx + a$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2a + 2 \int f(x) dx}} = dt$$

$$t+b = \int \frac{dx}{\sqrt{2(a + \int f(x) dx)}}$$

opracowanie projektowanych funkcji zębatej trandem
potem trzeba by jeszcze funkcję odwrotną

$$x = y(t)$$

N.g. $f(x) = -x$!!

by way of protest

3). Lte jako punkt niezaw. i zam. sta. n.p. $z = f(x, y)$
n.p. punkt ~~specjalny~~ w ośrodku ~~specjalnym~~ ^{zwykłym} ~~sta. z bardzo~~
~~lepszym~~; ~~ale nadajemy~~ tak iż równanie

Wtedy ośrodek wywiera przeciw opór, który jest funkcją przemieszczenia i który punkt się rusza; cenną przemieszczenia, tym większy opór ośrodka.

Jedli predkovi nie jest bardzo wielka to można uważać że opór
jako proporcjonalny do predkowi.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \cancel{mg} - k \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{dx}{dt} = \cancel{mg} - \frac{kx}{m} + a \quad | \quad t=0, \quad \frac{dx}{dt} = a, \quad x=0$$

Porównanie różniakowe pierwszego rzędu i pierwszego stopnia

$$\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x - \cancel{ax} = 0$$

$$\frac{dx}{x - a_m} = -dt \quad \text{for } x = a_m \quad \text{for } x = a_m$$

$$x = A + B e^{2\alpha t}$$

$$\dot{x} = -B_2 e^{-at}$$

$$-\frac{m}{k} = \log(x - \frac{Qm}{k})$$

$$\underbrace{(-B\alpha + \frac{k}{m} B)}_{=0} e^{-\frac{k}{m}t} + \underbrace{\frac{k}{m} A - a}_{=0} = 0$$

$$\alpha = \frac{k}{m} \quad A = \frac{am}{k}$$

$$x = \frac{am}{k} + B e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$0 = \frac{am}{k} + B$$

$$B = -\frac{am}{k}$$

$$x = \frac{am}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$\dot{x} = a e^{-\frac{k}{m}t}$$

~~Handwritten scribbles~~

Gyűjtés:

~~Handwritten scribbles~~

maximális elmozdulás = $\frac{am}{k}$ túlszárnyas sebesség $\frac{am}{k}$... stb.

sebesség a pontban $x=0$ $t=0$ = a zérushoz közel 0.

Rövidítés: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \frac{dx}{dt} = v$

Rövidítés: $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \frac{dx}{dt} = v$

Általánosított mozgásegyenlet: $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k f\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} f(v)} = t + c \quad \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} f(v)} = \frac{g + \frac{k}{m} f(v)}{g - \frac{k}{m} f(v)}$$

$v =$

$$m \frac{dv}{dt} = -k v^2$$

$$\frac{m}{k} = t + c$$

$$\frac{1}{t + c} = \dots$$

Stokes:

$$v = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho g}{\mu}$$

$$\mu = 0.018 \text{ (Din)} \text{ és } 0.00017 \text{ poise}$$

29 punktów wolnościowych!
Ruch w dwóch lub trzech wymiarach.

Ni dotąd ~~was~~ mielibyśmy zawsze ruch prosty, więc przyspieszenie ^{tylko} w kierunku ruchu, więc i siła tylko w kierunku ruchu.

Aby droga stała się krzywą przysp., więc i siła musi wychodzić z kierunku stycznej.

Zawsze nitylmożna rozłożyć w składowe $f \cos \alpha$ } działające wzdłuż
i wzdłuż prosta niezależnie od kierunku $f \sin \alpha$ } w pop.

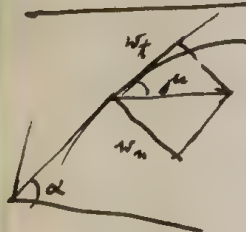
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \cos \alpha$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f \sin \alpha \text{ itd.}$$

Punkt odbywa ruch po prostej to ruchy równoważni.

Zamiast współrzędnych x, y możemy sobie wybrać. Najprościej jest
tęż jest dany, więc stąd s jako zmienną jedną. Wtedy prędkość

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



Całkowite przysp., więc i siła jak niezależny ruch v_x w kierunku stycznej. Jakże są jej składowe w kierunku stycznej i normalnej?

$$\text{Mamy } \frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \alpha$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \sin \alpha + v \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$v_x = v \cos \alpha = v (\cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha) = \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{więc } v_n = v \frac{d\alpha}{dt} = v^2 \frac{d\alpha}{ds} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{promień krzywizny } R = \frac{ds}{d\alpha})$$

Oprócz przyspieszenia stycznego t.j. w kierunku ruchu ~~dotychczas~~ dodatkowo istnieje jeszcze przysp. w kierunku normalnym, równe $\frac{v^2}{R}$.

Żeby więc punkt odbywał taki ruch na krzywej tego kształtu z prędkością v

31) W powyższym wydaje się dziwnie, że przy ruchu ze zjednostkowaną prędkością 31
 cyrkularnej prędk. - ale polega to tylko na ^{tem} niestwierdzeniu ~~stwierdzeniu~~ ~~prędkości~~
 że nowa prędk. jest niestwierdzona; byłoby lepiej nazwać tę wielkość inaczej
 zmierzchnością - ale bo wyraz jest już zawadliwy i utrudny.

Roze mnie jest ^{ostre} chybieniem na tym miejscu że w równaniu ruchu nie
 należy dodać jeszcze siły centryfugalnej do sił działających na punkt
 Długość obrotu jest $\frac{m \, dx}{dt} = X + \frac{m \, v^2}{R} \cdot \cos \alpha \dots$
 do tego pojęcia można tylko zastosować, jeżeli chodzi o równanie ruchu w
 płaszczyźnie s. W powyższej formie jest to już zawada w wyrażeniu
 $m \frac{dx}{dt}$, (który można wrócić jako siłę bezładności.)

Niesłuszne jest ilość różnych gatunków przemieszczających, które nierzadko
~~nie~~ geometryj. Tak w powyższych wypadkach ~~to~~ są to lub one kątowe
 Zatem wtedy wyrazić prędk. i siły w nich za pomocą opłucz
 wzorów dla ~~umieszczenia~~ wprowadzenia innych zmierzchności.

Najprościej Najprostszym przypadku; ~~to~~ opłucz jednorodny ^{(w} ~~stwierdzeniu~~ ^{stwierdzeniu)}

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \cos \varphi + r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

Z tego możemy otrzymać całkowitą prędk. $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

To też niepotrzebne, bo myśleliśmy, że wyrażenie jest drobny-
współrzędnych, gdy siła jest skierowana ku pewnemu biegowi.

Wzr. będzie nas interesował rozkład pręgo. w kierunku promienia i
w kierunku
przest. p. dty do niego.

$$w_r = \ddot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

$$w_\varphi = \dot{y} \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi = 2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$$

Teraz jeszcze ^{niektóre} tych wyrażen będziemy robili użytek.

Pojęcia prędo, energii itp., które właśnie wprowadziliśmy przy pomocy pręty
i tutaj możemy zastosować.

$$Pęd = m v \text{ (wielkość kierunkowa)}$$

$$\text{Energia kinetyczna} = \frac{1}{2} m v^2 \text{ (wielkość bezkierunkowa, bezwzględna)}$$

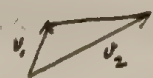
Pęd = $\int f dt$ ale ponieważ to f może różnie zmieniać się, trzeba by użyć
sumowania geometrycznego, dla tego wygodniej będzie je:

$$X = m \frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\int_1^2 X dt = m \frac{dx_2}{dt} - m \frac{dx_1}{dt}$$

$$Y = m \frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\int_1^2 Y dt = m \frac{dy_2}{dt} - m \frac{dy_1}{dt}$$



Wzr. i tutaj: Pęd = ^{geometryczna} różnica między pędami w dwóch punktach, geometryczna

A siła $w X =$ ^{pocho. składowe} różnica pędów wzdłuż osi x } siła = geometryczna pocho. pęd.

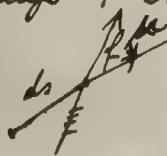
33 Praca siły określiliśmy tam jako całkę z iloczynu z siły i drogi.

~~Równanie i tutaj~~

$$\begin{array}{l|l} X = m \frac{dx}{dt} & dx \quad \int X dx = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + c_1 \\ Y = m \frac{dy}{dt} & dy \quad \int Y dy = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + c_2 \end{array}$$

$$\int (X dx + Y dy + Z dz) = \frac{m}{2} v^2 + c$$

To jest algebraiczna suma prac wykonanych przez siłki, więc praca jest nieporównywalna z praca wykonaną przy działaniu samego X , Y czy Z etc., ~~ale to nie równa praca przy działaniu równowagi~~



Tutaj równanie dokładnie drugie określiliśmy:
Praca = \int droga i siły wypadkowej w kierunku drogi

$P = \int ds f \cos \alpha$ gdzie $\alpha =$ kąt między siłą a kierunkiem drogi

$$\cos \alpha = \cos \alpha \frac{dx}{ds} + \cos \beta \frac{dy}{ds} + \cos \gamma \frac{dz}{ds}$$

$$P = \int f \cos \alpha dx + f \cos \beta dy + \dots = \int X dx + Y dy + Z dz$$

To też w inny sposób można otrzymać:

Wzór równica energii kinetycznej między dwoma punktami drogi równa się pracy przez siły między nimi wykonanej, przy czym jemu nie postaramy:
praca = \int droga \times siła ^{składowa} (w kierunku drogi)

Siła nie musi być w kierunku drogi, tylko jej składowa w kierunku drogi (w kierunku przemieszczania się)

Skorzystamy z tego przypadku jeżeli f zależy tylko od miejsca (x, y, z) , w
tym przypadku $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

Wtedy $P = - \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = - (U_1 - U_0)$

Wyciwny wtedy wartość pracy nie zależy wcale od kształtu drogi, jeżeli to
tylko ~~rozróżnia się między~~ punktem 1 i 2

Wtedy więc otrzymujemy funkcję U (-funkcja miejsca (x, y, z) , -) tego gotowca
je praca wykonana między dwoma punktami równa różnicy tej funkcji.

U nazywamy wtedy potencjałem, czyli energią potencjalną

~~Wtedy~~

A zatem równanie możemy napisać:

$U_1 + \frac{m}{2} v^2 = U_0$ Punkt 0 możemy obrać jako stały, 1 jako ruchomy
punkt odwołania

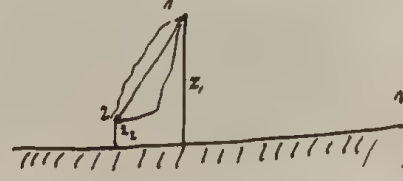
Wtedy: Summa energii potencjalnej i energii kinetycznej = stała
(Jeżeli użyjemy w ogóle energii potencjalnej!)

N.p. Gravitacja na ziemi

$x=0, y=0, Z = -mg$ $\int Z dz = \int -mg dz = -mgz + c$

$U = +mgz$

Waga ciała 2



na wszystkich tych drogach praca (równa)
ang (równy wysokości odd. poziomu)

Ważne takie jeżeli jakas droga punkt przejdzie z 1 do 2 to ta sama energia
kinetyczna, więc i ta sama prędkość będzie mieć.

Punkta gdzie U to sama wartość potencji możemy porównać z powierzchnią poziomu ~~stała~~
(Niveaulinia)

35) Podobnie siły elektrowstatyczne mają potencjał, podobnie wogóle siły które są tylko funkcjami odległości od pewnego centrum. $f = \frac{1}{r^2}$ ~~ale~~ $\frac{1}{r^2}$ etc. Siły Newtonowskie, Newtonowskie, grawitacyjne.

Takie siły wogóle nie są w stanie spowodować zmiany ^(zachowania) energii.

W Ekrystujs takie inne tak zwane ^{dispersji} rozpraszające, ponieważ rozpraszają energię (co to znaczy teraz nie można wy tłumaczyć). N.p. opór ośrodka, tarcie, wogóle siły które ~~nie~~ są funkcjami predkości v. N.p.: kv

Wtedy oczywiście jeżeli bardzo powoli z 1 do 2 poruszysz się punkt bardzo powoli na oporze bardzo małym, jeżeli predkość ta wielka, więc i praca wielka. Wtedy i praca różna na różnych drogach.

Charakterystyczną cechą tych sił ~~jest to~~ rozpraszających jest, że praca zmienia się częściowo przepuszczając w ciepło (jak przy tarcie). Energia potencjalna zawsze może się zamienić w energię kinetyczną, ale ta energia która się zamieniła raz w ciepło jest dla mechaniki stracona. Dokładniejsze zbadanie tych zjawisk wchodzi w zakres Termodynamiki.

$$m \frac{dv}{dt} = cf = m \frac{dv}{dt}$$

$$\int (dv \cdot \nabla U) = \int \frac{dU}{dt} = U_1 - U_2$$

$$\int (cf \cdot dt) = \frac{m}{2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

Przykład 43

Pierwszego rodzaju ruchu prostego. Jeżeli mamy $x = \varphi(t)$ wtedy $X = m \varphi''(t)$
 $y = \psi(t)$ wtedy $Y = m \psi''(t)$

Trudności tylko czasem z tego powodu, że formy funkcji φ, ψ nie są bezpośrednio dane, jak n.p. w wypadku klasycznego ruchu planet.

Ponieważ tam różne trudności, więc to zostawiamy sobie na koniec.

Najprościej kilka przykładów drugiego rodzaju.

Rzut ukośny:

~~$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$~~

$$X = 0 \quad Y = -mg$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

$$x = a_1 + b_1 t$$

4. statek
dowodem!

o statek całkiem niesłusznie

$$y = a_2 + b_2 t - \frac{g t^2}{2}$$

Wskazujemy natomiast tak że: $t=0 \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ więc $a_1 = a_2 = 0$

$$x = b_1 t$$

$$y = b_2 t - \frac{g t^2}{2}$$

$$\dot{x} = b_1$$

$$\dot{y} = b_2 - g t$$

Ściśnięmy na to że uśrednimy ów punkt z prędkością b pod kątem α

wtedy jej składowe: $b \cos \alpha$ i $b \sin \alpha$
 $= b_1 \quad = b_2$

więc: $x = b \cos \alpha \cdot t$

$$y = b \sin \alpha \cdot t - \frac{g t^2}{2}$$

Parabola skierowana ku dołowi.

Dyskusja:

y będzie uśredniona tak długo jak $y > 0$ więc ci $t = \frac{b \sin \alpha}{g}$

wtedy najwyższa wysokość: $h = \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, potem znowu

miniej się si przedmiotów przez oś X :

$$y=0: b \sin \alpha = \frac{g t^2}{2}$$

$$t = \frac{2b \sin \alpha}{g} \quad \left. \begin{array}{l} \text{więc spode tego samo} \\ \text{długo jak się wynosi} \end{array} \right\}$$

$$\text{a tymu odpowiadając: } x = \frac{2b^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{b^2}{g} \sin 2\alpha$$

= doświadczeniu

Z tego wynika: x będzie rostał z α aż do 45° , tam najwyżej
potem zmniejsza się do $x=0$ dla $\alpha=90^\circ$.

Punkt w który się trafi pod α , można także trafić pod $90-\alpha$

$$\text{bo } \sin 2(90-\alpha) = \sin 2\alpha$$

Zastosowanie w artylerii, armaty, moździerzach

Co do prędkości: ~~w tym momencie~~ z zasady energii już wynika:

$$\text{energia kinetyczna w punkcie 0: } = \frac{m b^2}{2}$$

zmniejsza się o $m g x$, potem zmów potencjalna, tak że równa w

końcu poziomu, tak samo i prędkość. Lecz to już prowadzi bezpośrednio

2. Względnie opór ośrodka: Przyjmijmy go prop. do prędkości.

$$X = -k v \frac{dx}{ds} = -k \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$Y = -mg - k v \frac{dy}{ds} = -mg - k \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\text{Pierwsza tak jak dawniej: } x = \frac{a m}{k} (1 - e^{-\frac{k t}{m}})$$

Drugie:

$$y - \frac{g t^2}{2} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = z - a$$

$$y = -g t \frac{m}{k} + \frac{m}{k} (1 - e^{-\frac{k t}{m}})$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + e^{-\frac{k t}{m}} (b + \frac{g}{k}) = e^{-\frac{k t}{m}} (b + \frac{g}{k}) - \frac{g}{k} = y - \frac{g t^2}{2} + \frac{g t^2}{2} = y - \frac{g t^2}{2}$$

~~W~~ Za czas $t=0$: $y=x=0$, $\dot{y}=b \sin \alpha$, $\dot{x}=b \cos \alpha$

44 (38)

$$a = b \cos \alpha$$

$$\beta = \frac{k}{m}$$

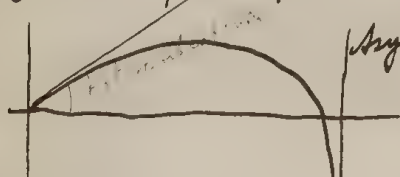
$$-g \frac{m}{k} + c \frac{k}{m} = b \sin \alpha$$

$$c = \frac{m}{k} b \sin \alpha + g \frac{m^2}{k^2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b \cos \alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\ y = -\frac{g t^2}{2} + \frac{1}{\beta} (b \sin \alpha + \frac{g}{\beta}) (1 - e^{-\beta t}) \end{cases}$$

$$\text{dla } y=0 \quad 1 - e^{-\beta t} = \frac{g t^2}{2 b \sin \alpha}$$

$$\frac{dy}{dt} = -g t + b \sin \alpha + \frac{g}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$



Asymptota

Krzywa niesymetryczna
(helistyczna)

x nie może przekroczyć pewnej granicy

Gdybyśmy byli przajili inną funkcję, na miejscu pierwszej potęgi przedkładałoby to byłoby zadanie dużo trudniejsze. W praktyce, wartości opór ma bardzo duży wpływ przy większych prędkościach powstających (600 m) ale ten błąd nie rachuje się, tylko mierzy się doświadczalnie, a rezultaty umieszczają się w formie tabeli (tak jak logarytmy).

Kształt przekroju

Wielkość Infanterysty 188 $c=620$ m

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

$$\frac{m dv}{g + kv} = -dt$$

Względna dźwignia pod 45° - 40 km

pod kątem 32° - 32 km

$$\frac{(620)^2}{10} = \frac{392}{125}$$

38'4 km

39
3). Punkt, który ~~dręgiem~~ ~~siłą~~ ~~4 g~~ sprężyste drgą sprężystości
w osi X i Y. N.p. koniec strzepy o przekroju prostokątnym, ~~o~~ prosto-
pady do tablicy. (Kaleidoskop)

Lity sprężyste ten się odkształca ze Δx proporcjonalnie do wychylenia
~~z~~ z położenia sprężystości; więc:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \dot{x} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\beta y^2 \end{aligned} \right\} \text{nieruchome odrobnie i tej samej formy, więc}$$

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\alpha^2 x^2 + a \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha^2}{a} x \right)^2}} = \frac{dt}{\frac{1}{\alpha m}} \quad \sqrt{\frac{a}{\alpha^2}} = \mu$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a - \alpha^2 x^2}} = \frac{dt}{\frac{1}{\alpha m}}$$

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{1 - (\mu x)^2}} = \frac{\mu \alpha m dt}{\frac{1}{\alpha m}}$$

$$\arcsin(\mu x) = \frac{\mu}{\alpha m} t + A$$

$$x = \frac{1}{\mu} \sin \left(A + \frac{\mu}{\alpha m} t \right) = \frac{1}{\mu} \sin \left(A + \frac{\alpha}{m} t \right)$$

$$y = \frac{1}{\beta} \sin \left(B + \frac{\beta}{m} t \right) = \frac{1}{\beta} \sin \left(B + \frac{\beta}{m} t \right)$$

Najprostszy przypadek jeżeli $\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{m}$ i $\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{m} = \gamma$

Pozostek nam moimny tak wybrać że: $x = \frac{1}{\mu} \sin \gamma t$

$$y = \frac{1}{\beta} \sin(\gamma t + \delta)$$

Ruch złożony z dwóch ruchów

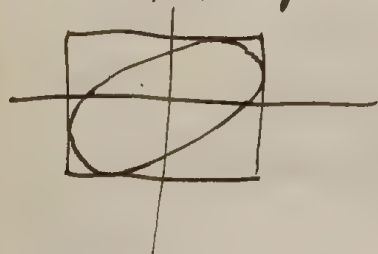
harmonicznych ~~z~~ ^{dręgiem} ~~z~~ ruch $x = \frac{1}{\mu} \sin \gamma t$ jest ruchem okresowym

x przebiega tę samą wartość, i cały ruch tak samo się powtarza po upływie

czas $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \text{okres}$. Największość = amplituda = skrajność wychyleń
 $= \frac{1}{\omega}$

skrajności zależą więc od stałej a , t. j. stałej ~~która~~ równej $(m \cdot v_x^2)$ w punkcie $x=0$. Okres zależy od niej niezależnie.

Dwa takie ruchy o tym samym okresie daje jako składowy ruch eliptyczny. Łatwo dowieść tego wyznając z powyższych równań.

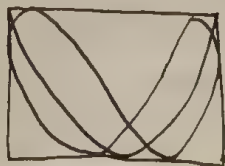


~~gdyż~~ Jeżeli $\delta = \frac{\pi}{2}$, oni eliptyczny w ośiach X, Y
 $p = q$ będzie koło

Jeżeli $\delta = 0$ będzie prosta w kierunku punktowidz
 Wtedy i prędkość płynie stała, a nie składowa jak wiodkami.

Jeżeli zaś $\alpha \neq \beta$ wtedy skomplikowane figury; jeżeli α i β są w stosunku wymiernym przez jakies liczby ~~całkowite~~, to po pewnym czasie ~~znowe~~ $t = \frac{2\pi}{\alpha} n_1 = \frac{2\pi}{\beta} n_2$ cały ruch się powtórzy, więc i on jest okresowym.

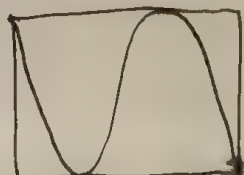
= figury Lissajous'a (Zobacz Witkowski pg. 63)



$2\alpha = \beta$



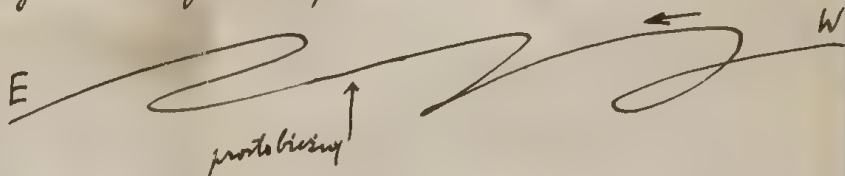
$3\alpha = 2\beta$



$3\alpha = \beta$

48 Ruch planetowy.

Planety, jak wiadomo odznaczają się od reszty globów tem że zmieniają ~~się~~ swe miejsce pomiędzy nich. Ale zawsze poruszają się w płaszczyźnie t.j.w. ekliptyki (po równiku). ~~Wszystkie są podobne~~ Wzajemna cecha ich ruchu polega na



ale dwójki są podobne:

♂ i ♀ zawsze poruszają się w niewielkiej odległości od Słońca; ♀ oddala się od Słońca do 42° , ♀ aż do 29° i z nim razem tworzą prosty kąt całego nieba w ciągu jednego roku. Prędkości ♂ 4 i ♀ na porównanie

nie zdają się tworzyć o porównaniu Słońca, one wydają się poruszać i potrzebują dłuższego czasu aby skończyć prosty kąt (4 kąt 11 lat)

Ptolemeusz i inni starali się opisać ten ruch za pomocą epicyklów i kręgów ale mimo opromienia skomplikowanych konstrukcji nie udało się to

udowodnić. Dopiero Kopernikus wskazał że ten niezgodny rezultat był spowodowany przez w najprościej sposób tak że Słońce a inne planety

w porządku ♀ ♀ ♂ ♂ 4 i ♀ (1571-1630) które mogą się obracać ze swobodą

wraz z nim. Ale Kepler dopiero był w stanie słowami dokłaennie

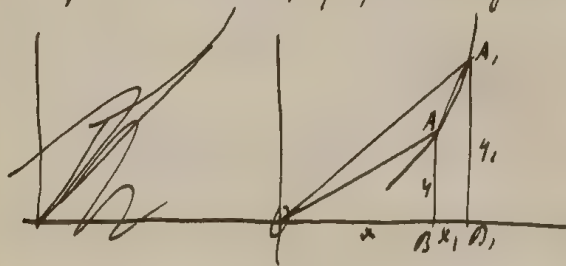
opisać bieg tych planet. Stwierdził trzy prawa Keplera:

I). Planety ^{po-kręga} ~~poruszają się~~ po elipsach ^{względnie w jednym z} Słońca, które ~~to~~ ^{ich ognisk}.

II) Te elipsy ^{Wielkość osi} przeciętne przez promień ^{od Słońca} są jednakowe.

III). Kwadraty czasu obrotu planet są proporcjonalne do (wielkości osi elips)³

Stwierdźmy sobie więc pytanie: Na jakim prawie mamy naliczyć wartości z tych praw? Najprościej rozważmy je drugim prawem. Wprowadzimy tu określenie nowego pojęcia: prędkość polowa, t.j. obrotu pola wokół własnego przez promień wzdłuż podziałowego przez odpowiedni promień osi.



$$\Delta P = OA_1 - OA_2 + A_1O_1 - A_2O_2$$

$$= \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{(x_1 - x)(y_1 + y)}{2} - \frac{x_2 y_2}{2}$$

$$= \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{2}$$

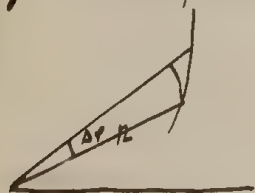
$$x_1 = x + \Delta x \quad y_1 = y + \Delta y$$

$$\Delta P = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(x \frac{\Delta y}{\Delta t} - y \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

$$P' = \text{prędkość polowa} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

Tę wyprowadzić możemy uogólniając, tylko dochodzi tu do pewnych uogólnień. Tutaj oczywiście korzystamy z uogólnień współrzędnych biegunowych.



$$r \Delta \varphi \quad (\text{wzrostu } r \sin \Delta \varphi)$$

$$\lim \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = P' \quad \text{co także z poprzedniego}$$

wyprowadzić się, stądż

$\frac{dy}{dt}$ i $\frac{dx}{dt}$ ze wzorów dawniej wypracowanych.

Drugie prawo i tak więc aby to prędkość P' była stała. (T.j. prędkość najwiskosa) (w punkcie, najmniejsza) (w punkcie)

$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c$ Co to znaczy toż samo pokazać wracając do dawniej wypracowanych

$$w_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{i} \quad w_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

$$\text{Mamy więc:} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \quad \text{a zatem} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2c}{r^3} \frac{dr}{dt}$$

$$\text{Wtedy} \quad w_\varphi = 0$$

13) Wzrę składowa przyspieszenia, wzrę i siły prostopadłe do promienia wodzącego równa zero a wzrę całej przyspieszenia a wzrę i siła działają tylko w kierunku promienia wodzącego, t.j. siła jest centralna.

Ruch tego rodzaju nazywamy centralnym. Łatwo dowiedzieć i odwrócić że jeżeli siła zawsze skierowana ku pewnemu centrum wtedy musi istnieć i odwrotnie ~~prawo~~ zachowania pól, ku względu na prawo siły.

W współrzędnych biegunowych składowe w_r i w_φ .

Dla odniesienia w współrzędnych prostokątnych:

[Sprawdzić na prostym zadaniu dla $\alpha = \beta$!]

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(r, \frac{dr}{dt}, t \text{ etc.}) \frac{x}{r} \quad \left| \begin{array}{l} -y \\ +x \end{array} \right.$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(r, \frac{dr}{dt}, t \text{ etc.}) \frac{y}{r}$$

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad \text{Zatem} \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{const}$$

Długość promienia: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

Tercie nas interesuje jakiej jest to prawo siły skierowanej ku słońcu. W tym celu

trzeba wiedzieć wyznaczyć dla w_r . Podzielmy się stałą wyrażenia wygłoszonego przez r^2 .

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p \varepsilon}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon r^2 \sin \varphi}{p} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon c}{p} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\varepsilon c}{p} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2}{p r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right); \quad \text{albo} \quad w_r = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{p r^2} = \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

Wzrę siły będzie $m \frac{c^2}{p} \frac{1}{r^2}$ skierowana ku słońcu.

Tercie prawo: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \lambda$

~~dla~~ $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

Z drugiego prawa wygłoszonego: czas ~~około~~ obrotu $T = 2\pi \frac{a^3}{c} = 2\pi \frac{a^3}{c} \sqrt{\lambda}$

Wzrę dla wygłoszonych planet

przy przesunięciu δs musi być równa zero. Rozkładając ją na osie ⁴⁶
otrzymamy warunki: $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$ dla równowagi. ⁴⁸

Jeżeli jednak punkt przesuwa się na powierzchni etc. to wystarczy
dla równowagi wyznaczyć żeby praca przy przesunięciu w powierzchni etc.
była $= 0$, bo inne i tak nie możliwe; więc wtedy to samo równanie
ważne jest warunkiem i $\delta x, \delta y, \delta z$ zadają czynią warunkom przemieszczenia

Więcej to jest warunkiem dla stanu równowagi, więc statyka.

Do dynamiczki przechodzimy zapomocą zasady D'Alemberta:

Jeżeli siły ^{zewnętrzne} nie są w równowadze, tylko wywołują ruch punktu, to przecież
byłyby one w równowadze, gdybyśmy dodali do nich jeszcze taką
siłę — ale przeciwną — siłę, jak ta która by ruch faktyczny wywołała.

N. p. wehadeł: punkt przyjmie jakiś prędkość $\frac{dx}{dt}$, gdybyśmy wtedy
mogli dodać stałe nie określone $m \frac{dx}{dt}$ toby osiągnąć 0 to w spoczynku.

Więc i w razie ruchu siły $X - m \frac{dx}{dt}$, $Y - m \frac{dy}{dt}$, ... będą w równowadze,
więc wkładając je do powyższego wzoru mamy to samo równanie jak
przede: $(X - m \ddot{x})\delta x + (Y - m \ddot{y})\delta y + (Z - m \ddot{z})\delta z = 0$.

W jaki sposób teraz najwygodniej uwzględnić warunki przemieszczenia dla $\delta x, \delta y, \delta z$:

Warunki można napisać w formie $\varphi(x, y, z) = 0$ (jeden lub dwa)
 $\varphi(x, y, z) = 0$

Różniczkując je:

[Ogólniejszych warunków np. $\varphi(x, y, z, t)$ nie uwzględniamy]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0$$

} mamy warunki których $\delta x, \delta y, \delta z$
muszą zadost' uczynić

(bo wtedy $\delta x \delta y \delta z$ prostopadłe do normalnej)

47 Chodzi więc o eliminację λ z równań. Aby się to najprościej
 za pomocą t.w. nieskreślonych mnożników (Unrestricted Multiplier),
 pierwsze \times pomnożyć przez λ a drugie przez μ i dodać, potem
 wybrać λ i μ tak że () δy i () δz zanikną; wtedy musi być () $\delta x = 0$.

Wzrę w tym razie (ruch po krzywej):

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Wzrę λ jest stała równa $\times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \dots$

Jedni zaś tylko jedno równanie, wtedy λ tak dobraci że () $\delta z = 0$, wtedy
 ponieważ δx i δy już teraz całkiem dowolne, więc:

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ etc. etc.}$$

Przykłady:

1). Równia pochyła. Wtedy cięgie jest to ruch po powierzchni ale ponieważ
 $y = A - bx$ oczywiście będzie się odbywał w prostej, więc tylko 2 osi.

$$(X - m \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y = 0 \quad X = 0 \quad Y = -mg$$

$$= a - t_2 \text{ c.p. } x$$

$$(0 - m \frac{d^2 x}{dt^2}) \delta x + (-mg - m \frac{d^2 y}{dt^2}) \delta y = 0$$

$$b \delta x +$$

$$\delta y = 0$$

$$\lambda b - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\lambda - mg - m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda b - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ \lambda - mg - m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{array} \right\} = \lambda - mg + m b \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad | \cdot b$$

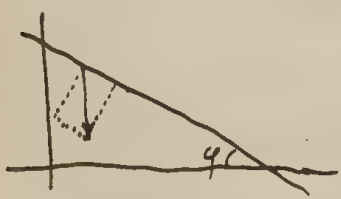
$$mgb - m(b^2 + 1) \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{wzrę}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{b}{b+1} g = g \sin \varphi \cos \varphi \parallel s = \frac{x}{\cos \varphi}$$

Wzr $\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \varphi$

Naturalnie w tym wypadku wykorzystanie właściwości jest metoda bezwzględna

Wzr tak samo jest dwukrotnie przysp. ruch jak przy spadaniu, tylko przysp. w stosunku nie zmienia.



Jeżeli prędkość początkowa = 0: $s = \frac{g t^2}{2} \sin \varphi$



W równych czasach będą punkty spadły na różnych podłożach tak że znajdzie się na obwodzie koła.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g^2 t^2 \sin^2 \varphi = 2 g s \sin \varphi = 2 g h$$

Prędkość ortostyczna zależy tylko od różnicy poziomów, nie od nachylenia, co zostało udowodnione z zasady energii.

2. Wzrost wyzyska. Punkt materialny umocowany na końcu sznurka o stałej długości lub ~~ciągnie~~ ślizgający się na powierzchni wklęsło-kulistej. Przyjmijmy że ruch odbywa się w płaszczyźnie.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} X=0 \quad Y=-mg \end{aligned} \right\} \text{ Siły} \\ & \left. \begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{y} = \ddot{r} \end{aligned} \right\} \text{ warunki dla } \delta x \delta y \text{ i } \ddot{r} = x \delta x + y \delta y = 0 \\ & \left. \begin{aligned} -m \ddot{x} \delta x + (-mg - m \ddot{y}) \delta y = 0 \\ x \delta x + y \delta y = 0 \end{aligned} \right\} \lambda \\ & \text{Z czego, zakładając } \ddot{r} = 0 \\ & \left. \begin{aligned} m \ddot{x} + \lambda x = 0 \\ m \ddot{y} + mg + \lambda y = 0 \end{aligned} \right\} \ddot{x} \quad \rightarrow \quad m(\ddot{x} \ddot{x} + \ddot{y} \ddot{y}) + mg \ddot{y} = 0 \quad \text{I zatem całkując:} \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + g y = c \end{aligned}$$

Oczywiście tu dogodniej wprowadzić układ biegunowy



$$x = a \sin \varphi$$

$$y = a(1 - \cos \varphi)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$\text{A zatem: } \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \cancel{mga} = C - g a \cos \varphi$$

Do tego samego równania możemy dojść także i na inne sposoby:

β). Z tej samej zasady prac przygotowanych dla nas powyżej oraz mnożników nieokreślonych λ, tylko wprost wprowadzając warunki między δx, δy:

$$+ m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \left(mg + m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y = 0$$

$$\delta y = -\delta x \cdot \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{x}{y} \right) \delta x = 0 \quad \text{A ponieważ wtedy } \delta x \text{ dowolne:}$$

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} = g x$$

$$= \frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = g a \sin \varphi = a^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \left(\text{ponieważ } r=a \text{ stałe} \right)$$

A całkując, pomnożymy przez dt:

$$(C \text{ w tym razie} = C + g a)$$

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = C - g a \cos \varphi$$

γ) Teraz bezpośrednio rozłożymy siły na składową normalną tj. do kierunku promienia wodzącego i na składową styczną.

$$\text{Ostatnia } m g \sin \varphi = m \bar{w}_\varphi = m a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

δ). Bezpośrednio ze zasady energii.

$$m \frac{a^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = C' - m g y \quad \text{i.t.d.}$$

A zatem tak samo jak przedtem

Kinet. energia
 $\text{na } P \text{ do kin.}$
 $m \frac{d\varphi}{dt} = \bar{p}_\varphi = m a \frac{d\varphi}{dt}$
 $m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$
 $\sqrt{\text{Praca}}$
 ciężkości

54)
3). Wahadło sferyczne

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} z \\ \swarrow \\ x \\ \searrow \\ y \end{array} \quad \left(-m \frac{dx}{dt} \right) \delta x - m \frac{dy}{dt} \delta y - \left(mg + m \frac{dz}{dt} \right) \delta z = 0 \\ & \quad x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0 \quad | \cdot \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} y & \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0 \\ x & \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0 \\ & \frac{dz}{dt} + g + \lambda z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Naturalnie takie współrzędne:} \\ m \frac{dx}{dt} = -N \frac{x}{a} \quad (\text{wzr. } \lambda = \frac{N}{m a}) \\ m \frac{dy}{dt} = -N \frac{y}{a} \\ m \frac{dz}{dt} = -N \frac{z}{a} - mg \end{array}$$

$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = 0$ więc prędkości obrotowe stałe, co tak się rozumie ponieważ siła zawsze skierowana ku ośrodkowi Z

$$\frac{dx}{dt} dx + \dots + g dz = 0 \quad \text{bo } x \frac{dx}{dt} + \dots = 0$$

$$\text{wzr. } \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + g z = C \quad \text{co też współrzędne ze zasady energii}$$

Najprościej teraz wprowadzić układ biegunowy sferyczny przez co będzie

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= C = a^2 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \\ C &= g a \cos \theta + \frac{1}{2} a^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Całkowanie tych równań} \\ \text{wymaga znajomości} \\ \text{funkcji eliptycznych, dlatego} \end{array} \right\}$$

tutaj zajmijmy się tylko tym szczególnym wypadkiem jeżeli ruch odbywa się prawie w płaszczyźnie równoległej z XV , więc jeżeli z ϕ przybliżeniu stałe.

$$\text{Wtedy } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{zatem } \lambda = -\frac{g}{2}, \quad \text{zatem } \left| \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{2} x \right| \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{2} y$$

co jest szczególnym przypadkiem naszych równań $m \frac{dx}{dt} = -\beta x \quad m \frac{dy}{dt} = -\beta y$

gdzie $\alpha = \beta = \frac{g m}{2 m}$. Wtedy zakładamy że ruch wtedy jest eliptyczny i okresowy, a czas okresu $\tau = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{m} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}}$. Zatem jeżeli wychylenia w ośrodku bardzo małe, wtedy okres niezależny od kształtu drgań i od prędkości początkowej. Jeżeli zaś wychylenia wielkie, to tak że ruch w płaszczyźnie wchodziłby stałkow, wtedy okres odpowiada wahaniom wahadła o długości $2a$.

Gdyby zasada prac przygotowanych była ograniczona do mechaniki punktów, toby z niej nie było wielkiej korzyści, ponieważ, jak widzieliśmy w oryginalnych przykładach, często wiele trudniej pójść do celu bezpośrednią metodą. Ale można ją tak samo też zastosować do ogólniejszego przypadku układów punktów, jeżeli inności naszemu jemu bardziej trudu.

Odebraliśmy mieli dla każdego punktu tak samo jak pierwotnie:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \xi_1 & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + \xi_2 & \text{etc.} \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= Y_1 + \eta_1 & & & \end{aligned} \right| \delta \xi_k \delta \eta_k \delta z_k = \sum_k (\xi_k \delta \xi_k + \eta_k \delta \eta_k + \zeta_k \delta z_k)$$

$$\sum_k \left(m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - X_k \right) \delta \xi_k + m_k \left(\frac{d^2 y_k}{dt^2} - Y_k \right) \delta \eta_k + \left(\frac{d^2 z_k}{dt^2} - Z_k \right) \delta \zeta_k =$$

Prawa strona jest sumą prac sił ~~pr~~ przymusowych przy przesunięciach δx etc.

Kiedy punkt można uważać jako swobodny jeżeli się doda do sił właściwych siły powstające wskutek oddziaływania potencjału między punktami.

Potencjały wystawiamy sobie ukształtowane za pomocą stygmych i stob albo łączących owe punkta których odległości ma zostać niezmiennymi.

Wtedy więc siły $\xi_k \eta_k \zeta_k$ działają tylko w kierunku łączących ^{parami} i z powodu równości działania i oddziaływania będą równe a przeciwnymi. ~~pr~~ N.p. siły połączenia między 1 i 2 wejdą w sumę powyższą jako $\int_1 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix}$ i $\int_2 \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{Bmatrix}$

W owej sumie powstanie więc wskutek tego połączenia wyraz:

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \eta_1 dy_1 + \eta_2 dy_2 + \zeta_1 dz_1 + \zeta_2 dz_2 =$$

$$= \xi_1 (dx_1 - dx_2) + \eta_1 (dy_1 - dy_2) + \zeta_1 (dz_1 - dz_2) =$$

$$\int_1 \dots X = \dots \xi + X_2 + X_3$$

$\xi_1 = \int \omega(x_2) = \int \frac{(x_2 - x_1)}{2}$ itd. Zatem:

$$I' = \int \left[\frac{(x_2 - x_1)}{2} (\delta x_2 - \delta x_1) + \frac{(y_2 - y_1)}{2} (\delta y_2 - \delta y_1) + \frac{(z_2 - z_1)}{2} (\delta z_2 - \delta z_1) \right] = \int \delta x$$

co oczywiście musi być zerem ponieważ mamy: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots = a^2$
 więc różniczkując wyraz w nawiasach $= 0$.

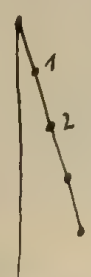
Zresztą zdaje się: tak jemu przez się zrozumiało że przy przesunięciach możliwych praca sił opornych musi być $= 0$, bo przecież aby praca była > 0 musi być nitylko siła > 0 ale takie przesunięcie w kierunku siły > 0 a przecież w kierunku tych sił opornych ~~zajobiegają~~ przesunięciu w ich kierunku. Mamy więc ogólne równanie dla układów punktów (które obejmują naturalnie także punkty swobodne itd.)

$$\sum_k \left[\left(X_k - m_k \frac{d^2 \ddot{x}_k}{dt^2} \right) \delta x_k + \left(Y_k - m_k \frac{d^2 \ddot{y}_k}{dt^2} \right) \delta y_k + \left(Z_k - m_k \frac{d^2 \ddot{z}_k}{dt^2} \right) \delta z_k \right] = 0$$

przy czym naturalnie tak jak dawniej δx_k itd. tak muszą być dobrane aby były zgodne z warunkami.

[Wykluczone są t.w. ~~potencjału~~ jednostronne n.p. ~~(Hazyga Hazyga!)~~]

N.p.: Wchodzą ~~z~~ składające się ze źródeł ~~aktywnej~~ ale niemasywnej na której jest umocowanych n funkcjonal o różnych masach w różnych odstępach.



$$x_k^2 + y_k^2 = \left(\frac{k}{n} \right)^2 a^2$$

$$\sum_k \left[(-m \ddot{x}_k) \delta x_k + (-m g - m \ddot{y}_k) \delta y_k \right] = 0$$

$$x_k \delta x_k + y_k \delta y_k$$

$\ddot{x}_1 + \lambda_1 x_1 = 0$	\dot{x}_1	$\ddot{y}_1 + g + \lambda_1 y_1 = 0$	\dot{y}_1
$\ddot{x}_2 + \lambda_2 x_2 = 0$	\dot{x}_2	$\ddot{y}_2 + g + \lambda_2 y_2 = 0$	\dot{y}_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Chciał powiedzieć że
 wódcę było no umiesz skłonięty
 gdy mch mupia i wódcę i t.d. i t.d. i t.d.
 (Dziękuję)
 Takie wielokrotnie
 warunki są chyba to
 wódcę

Wariacje można napisać w formie:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{k}{n} x \\ y_k &= \frac{k}{n} y \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{jeżeli } x, y \text{ oznaczają przemieszczenia końca wzdłuż} \end{array} \right.$$

Więc zamiast uzyskać 2 w tym wypadku wiele prostiej:

$$\delta x_k = \frac{k}{n} \delta x \quad \text{etc.} \quad \text{a dotyczy wszystkich wariacji dla końca, } x \text{ i } y = a$$

Więc:

$$\sum_k \left[\left(\frac{k}{n} \right)^2 \ddot{x} \delta x + \left(g + \frac{k}{n} \ddot{y} \right) \frac{k}{n} \delta y \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} \delta x \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 + g \sum \frac{k}{n} \delta y - \ddot{y} \delta y \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 &= 0 \\ x \delta x + y \delta y &= 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{x} \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 + \lambda x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{array} \right. \quad (\ddot{x} \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 + g \sum \frac{k}{n} \ddot{y} = 0$$

$$g \sum \frac{k}{n} + \ddot{y} \sum \left(\frac{k}{n} \right)^2 + \lambda y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{array} \right. \quad \text{Co spełnia to same równanie}$$

jest jak przy zwykłym wahadle jeżeli tam zamiast g podstawimy:

$$g \frac{\sum \frac{k}{n}}{\sum \frac{k^2}{n^2}} = g \frac{n \sum k}{\sum k^2} = g \quad \text{a okres } T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

(Strona)

Ciekawy przykład: metronom

związany z...

$$(m_1 g - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}) \delta y_1 + (m_2 g - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}) \delta y_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = \text{const}$$

$$(m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2) \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2}$$

55 Takie i w tym wypadku myślbymy dojść do rezultatu na inny sposób tj. zapomocą zasady energii. Ta zasada znana jest dotąd tylko dla pojedynczego punktu. Teraz dowieziemy jej dla układu punktu a opierając się na tej zasadzie zachowania ruchu środka masy i zachowania pól. Są to tak zwane „ogólne całki ruchu”.

Dojmy nam to że mamy n punktów materialnych, na które działają siły zewnętrzne i które mogą też oddziaływać między sobą jakimiś siłami. W ostatnim rozdziale jest też już zawarty ów przypadek gdy istnieje między nami jakiś przyciągnięcie statyczne.

Nazwijmy wtedy $\{X_k, Y_k, Z_k\}$ siły wypadkowe — strona więc ze sił zewnętrznych i wewnętrznych — działające na punkt k mamy:

$$\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= X_k & dx_k \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= Y_k & dy_k \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= Z_k & dz_k \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{m_k}{2} \left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 &= c_k + \int (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k) \end{aligned}$$

Tworząc te wyrazy dla wszystkich punktów i sumując otrzymamy

$$\sum \dots = \sum \dots + \sum \dots$$

Lewa strona = całkowita energia kinetyczna układu, którą nazwiemy T
 $T = C + \sum \int (X dx + Y dy + Z dz)$ a prawa strona jest całkowita praca wszystkich ~~sił~~ ^{całkowitych} ~~sił~~ ^{pracy} ~~sił~~ ^{pracy}

Lub też:

$$T_2 - T_1 = \sum_1^2 \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

Więc różnica energii całkowitej układu w dwóch ^{porządkach} ~~stanach~~ ^{pracy} = praca na drodze między niemi wykonanej.

54 (58)

Takie siły, które można uważać jako pochodną potencjału U naszego, jak już dawniej wspomnieliśmy: zachowawczymi. Tunc zaś rozpatrzmy n.p. tarcie, opór ośrodka, wogół takie gdzie praca mechaniczna zamienia się w ciepło.

Więc jeżeli działają tylko zachowawcze siły to suma energii kinetycznej i potencyjnej zostaje stała. Lubić też: jeżeli układ znów wróci w zupełnie ten sam stan to ta energia kinetyczna całkowita będzie ta sama (ale nie potrzebuje być tak samo rozdzielona na pojedyncze punkty).

Teraz wprowadzamy nowe pojęcie: środek masy układu

Znajdujemy jego współrzędne ~~stąd~~ jako średnie wartości masy i odległości

Więc: $\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$ $\bar{y} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$ $\bar{z} = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}$

Dodawając - tuż wszystkie równania mechaniczne otrzymamy:

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \sum \bar{X}_k = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k x_k = \sum m_k \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \sum X_k$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \sum Y_k \quad \sum m_k \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \sum Z_k$$

formuły synchronizacji
Z tego wynika: że środek masy tak się porusza jak gdyby w nim były umieszczone wszystkie masy i wszystkie siły działające.

[Ale nie tak jak gdyby tylko na niego była działająca n.p.]

~~W~~ Uwzględnienie takich takich jak gdyby wszystkich przemieszczeń siły były skoncentrowane w środku, ale to będzie inne niż nie to, którą 0 wyznacza w S

59) Rozważmy trósz ility ciałkowite $X \vee 2$ na równi i na tokiu któu tylko między punktami wkładu dżistoję x, y równiune.

$X = X' + X''$ wtedy $\sum X = \sum X' + \sum X''$ a trzeba zauważyć iż ~~na~~ równiune dżistoję równe między parami punktów, więc wchodzi w rachubę i dżistanie i oddziaływanie które są równe ale przeciwnie, toż iż więc $\sum X'' = 0$. A więc przy ruchu środka masy ~~nie~~ ^{potrzeba} uwzględnić tylko ility równiune. W równiune powstaje bez skutku. Jeżeli niema równiunych wtedy

$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$ więc wtedy środek masy ~~środek masy~~ ^{przebiega} ~~przebiega~~ ^{przebiega} prosto się w prostę linię z jednostajną prędkością.

Przykłady: armata i pocisk



Armata, pocisk

(strzelba -)

któdeż pocisk opóźniający w punkcie x , mamy zawsze $m_x = -M_X$

więc i $v: V = M: m$ m.p. $\frac{m}{M} = \frac{1}{200}$, $v = 600 \text{ m}$

$V = 3 \text{ m}$ trzeba hamować przez

hamulec hydroauliczny i przez kółko podłożone pod koło.

Łódź i wiośle w wodzie, ptak latający, czołowy sterujący wtył z rewersem toż prędko że leci naprzód, czołowy podskakujący na dół i dżucie ziemie, wkład słoneczny, strzałki okładające

$\sum m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum F_k$

$\sum m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum F_k$

Zasada zachowania pól.

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k \quad \begin{vmatrix} -y \\ x \\ y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ -x \end{vmatrix}$$

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k$$

$$m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k$$

$$m_k \left(x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) = x_k V_k - y_k X_k$$

$$= m_k \frac{d}{dt} \left(x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} m_k (x_k y_k - y_k x_k) = \text{podwójna prędkość obrotowa}$$

Summy:

55 60

$$\frac{d}{dt} \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum (x_k Y_k - y_k X_k)$$

prędkości obrotowej (wynikowej)

$$\frac{d}{dt} \sum m (y \dot{z} - z \dot{y}) = \sum (y Z - z Y)$$

powinno być przez masę punktu

$$\frac{d}{dt} \dots \dots \dots$$

muszą być się zmieniają momentom obrotowym, a sumę tych momentów

dla wszystkich punktów układu zmieniający momentum obrotowe całkowite

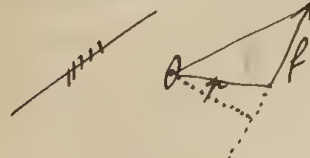
Tak że mamy więc na lewej stronie ^{pochothane wartości} momentów obrotowych całkowitych

i prędkości obrotowych.

distansuj na pewnym punkcie

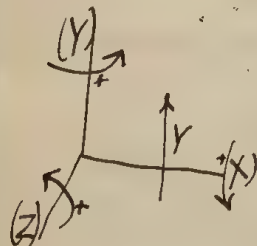
Z drugiej strony wprowadzimy teraz pojęcie momentu siły, względem ~~prędkości~~ ^{składowej prostopadłej do osi prostej} prostej t.j. iloczynu ze ~~wielkości~~ ^{siły} siły i odległości (najkrótszej) między osi prostej i kierunku siły. N.p. jako oś obrotu prostej prostopadłej do

tablicy, a jako siły jakas lodzi --



Wtedy musimy rozłożyć siłę na składową w kierunku osi i prostopadłą do niej F, a

moment siły będzie stanowił z odległości p i z siły F (t.j. podwójny obszar trójkąta). N.p. moment siły ^{względem osi Z} ~~distansuj~~ na punkt odległy o x od początku



jest $x \cdot Y$ (przy tem trzeba gdzie kierunek ustanowić jako dodatni a przeciwny jako ujemny; tutaj będziemy uważali ten ^{moment} dodatni który stara się wprowadzić ~~na~~ obrót dodatni t.j. w kierunku korkowego (prawy) obrótu)

t.j. tak zwany system angielski

przeciwny nazywamy systemem francuskim

Wice względem osi Z dodatni musi tylko być Y, wyrażając



$$F \sin \alpha = F \sqrt{(\cos \alpha \cos \beta - \cos \beta \cos \alpha)^2 + (\dots)^2} = \sqrt{(Y - Y_x)^2 + (\dots)^2}$$

W przypadku ten sam sposób można stworzyć moment wypadkowy ⁵⁶ 62
momentów obrotowych.

Więc będzie można odpowiedzieć to same zdanie także w formie:
Znaczenie momentu wypadkowego całkowitego obrotowego równa momentowi
wypadkowemu całkowitemu sił. (co do wielkości i kierunku)

Mamy teraz już ^{mały} ~~cały~~ zbiór wielkości, które można tworzyć ze składowych przez
geometryczne ~~z~~ dodawanie:

prędkości, przyspieszenie, siła, ilość ruchu, moment prędkości obrotowej, moment sił
Wszystkich tych ~~cała~~ ~~z~~ wzajemna jest że są to wielkości kierunkowe;
nazywamy je także wielkościami wektorowymi (Vektorsgrößen).

Pozostają także inne wielkości, gdzie jednak kierunek nie wchodzi w
rachuby, które są już oznaczone przez wielkości bezwzględne: energia
kinetyczna, potencjał, praca, masa, gęstość. Takie nazywamy (Skalaris).

Jeżeli jednak ze składowych momentów $= 0$ wtedy mamy

$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = A$ moment prędkości obrotowej w płaszczyźnie
prostopadłej do osi odpowiedniej będzie stałym. Jeżeli wszystkie momenty
sił $= 0$ wtedy i moment wypadkowy obrotowy będzie stały co do wielkości i
kierunku, więc wtedy będzie przygotowane płaszczyzna w której moment
obrotowy najwzrosty; ten zawsze będzie nieskończony. Wypadkowy stały kierunek: stały wielkości

Ważne uwagi Należy jeszcze wspomnieć że do momentu sił przyczyniają
się tylko siły zewnętrzne.

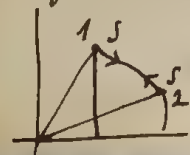
siła S wyjdzie w następujący sposób:

Tworząc n.p. moment kątowy Z ~~deklarujemy~~ ~~aniżeli~~

$$x_1 \int \frac{y_1 - y_2}{r} + x_2 \int \frac{y_2 - y_3}{r} + y_1 \int \frac{x_2 - x_1}{r} + y_2 \int \frac{x_1 - x_2}{r} = 0$$

$$\sum m x [y_1 y_2] = \sum m x$$

$$[y_1 y_2] + [y_2 y_3] + \dots$$



Krótki jidn punktad przy ruchu centralnym gdzie prędkość wypadkowa była stała ponieważ siły tylko wewnętrzne.

Stale prędkość obrotowa ziemi, kręci (to porównaj później jeszcze dokładniej) możemy jednak zmienić długość dnia gdyby np. wielka ilość obrotów ~~stała~~ powstała podzielić kół ziemi w stałym kierunku.

(Czy prędkość morskie mogą drotać w tym kierunku? Zależy mi na tym bo one poruszają się w skutek rotacji ziemi, przynajmniej te które poruszają w skutek zmienności temperatur N-S.

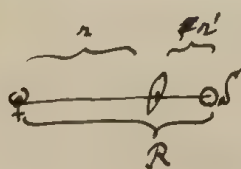
Kół spodając zawsze stanie na nogach. Spowoduje obrót kół swą osi przez rzućcie łapki

Empirya IV 6 p. 530

1894

Tylko jidn punktad jidn robimy, gdzie możemy zastosować te prawa:
Ruch planety, ale tuż odwrócić zadanie: znaleźć drogę tor jidn
jako siła dane prawo grawitacji $k \frac{Mm}{R^2}$

Jako początek współrzędnych ~~współrzędnych~~ ^{obieramy} naturalnie środek mas, który
mamy przyjęci jako nieruchomy.



Wtedy jidn te zasady zachowania ruchu środka masy

wyjdzie że $\ddot{\varphi} = 0$ będzie liczył na prosty i że

$$r' : r = m : M, \text{ więc } r' = r \frac{m}{M}$$

Łatwo drotać się tylko wewnętrzne, więc zastosujemy zasady pól:

~~Wtedy stała stała~~ Prędkość obrotowa wypadkowa będzie niezmienna;
wice więc z pewnym rozsądkiem wynika że ^{droga} ~~droga~~ będzie płaska

Oznaczmy ją obieramy jako płaszczyznę współrzędnych jednorodnych

$$\text{więc } m r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M r'^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{stała} \quad \text{czyli} \quad m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \text{stała}$$

Do tego jemu zasada energii: $-\frac{mM'}{(r+r')^2} = -\frac{mM^2}{r^2(m+M)} = -\frac{mM^2}{(m+M)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right)$ $U = \frac{Mmk}{r+r'}$ (64)

$$T = \frac{m}{2} \left[r^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] + \frac{M}{2} \left[r'^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr'}{dt} \right)^2 \right] = m M \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r+r'} \right) = -\frac{Mmk}{(r+r')^2}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(m + \frac{m^2}{M} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(m + \frac{m^2}{M} \right) = \frac{m}{2} \left[r^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{m M}{r} \frac{k}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)} + T_0$$

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \left(1 + \frac{m}{M} \right) = c & r^2 \frac{dy}{dt} = \frac{c}{1 + \frac{m}{M}} = \beta \\ r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2 M k}{\left[1 + \left(\frac{m}{M} \right) \right]^2} \frac{1}{r^2} = \frac{\alpha}{r^2} + \gamma \end{cases}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{dy}$$

$$\frac{1}{r^4} + \frac{\beta^2}{r^4} \left(\frac{dr}{dy} \right)^2 = \frac{\alpha}{r^2} + \gamma - \frac{\beta^2}{r^2}$$

$$\frac{\beta^2 dr^2}{\alpha r^3 + \gamma r^2 - \beta^2 r^2} = dy^2$$

$$d\varphi = \frac{\beta}{r} \frac{dr}{\sqrt{-\beta^2 + \alpha r + \gamma r^2}}$$

$$d\varphi = \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\gamma + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}} = \frac{\beta}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\gamma + \frac{\alpha^2}{4\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\beta}{2} \right)^2}}$$

$$\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\beta}{2} = u \quad \frac{\beta}{r^2} dr = du$$

$$dy = \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = \frac{d\left(\frac{u}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{A}\right)^2}}$$

$$\varphi + B = \arcsin \frac{u}{A}$$

$$\frac{u}{A} = \sin(\varphi + B) = \frac{\alpha}{2A\beta} - \frac{\beta}{A^2}$$

$$\frac{\beta}{A^2} = \frac{\alpha}{2A\beta^2} - \frac{A \sin(\varphi + B)}{\beta}$$

$$r = \frac{A}{\frac{\alpha}{2A\beta^2} - \frac{A \sin(\varphi + B)}{\beta}} = \frac{1}{\frac{\alpha}{2\beta^2} - \frac{A \sin \varphi}{\beta}}$$

65.

$$n = \frac{\mu}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$\mu = \frac{2\gamma}{a} + \frac{\alpha}{2\beta^2}$$

$$\varepsilon = + \frac{2A\beta}{\alpha}$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mu = \frac{2\gamma}{a} + \frac{\alpha}{2\beta^2}$$

$$\varepsilon = \frac{(1 + \frac{\alpha}{2\beta^2})}{\frac{2\gamma}{a}}$$

$$\varepsilon = \frac{2\beta}{\alpha} \sqrt{\gamma + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{4\beta^2\gamma}{\alpha^2}}$$

$$1 - \varepsilon^2 = - \frac{4\beta^2\gamma}{\alpha^2}$$

To jest równanie wspólne dla elipsy, paraboli i hiperboli; to są więc możliwe ruchy; który nastąpi zależy od tego czy $\varepsilon \leq 1$ ^{el.} $\varepsilon > 1$ ^{hyp.}

Wzr. od tego czy stała γ będzie ≤ 0

Owa stała oznacza ~~nie~~ energię kinetyczną w przyjętej pozostawionej

Jeżeli więc stała $\gamma \leq \frac{kmM}{2(1 + \frac{m}{M})^2}$ to będzie ruch ^{el.} ^{hyp.}

wtedy to nie zależy jednak od kierunku ruchu w danym momencie.

Jeżeli ma być kółko to $\gamma = - \frac{\alpha^2}{4\beta^2} =$

To obejmują się dotychczas I i II prawo Keplera. Trzecie prawo wyraża się w do uzm. że dotychczas tylko ~~to~~ konstatację kręgową. Gas można wprowadzić jak to prowadzi już uogólnioną zależność II prawo.

$$\mu = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$$

Gas obieg cały: $T = 2\pi \frac{a^3}{\mu} = \frac{2\pi a^3}{\frac{b^2}{a}} = \frac{2\pi a^4}{b^2}$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\beta^2} = \frac{8\beta^2}{\alpha^2} \pi^2 = \frac{8\pi^2}{\alpha}$$

$$= \frac{8\pi^2 (1 + \frac{m}{M})}{Mk}$$

$$= \frac{4\pi^2}{2ca} \frac{a^4}{4\beta^2} = \frac{a^3 \pi^2}{2\beta^2}$$

$$a = \frac{a^2}{1 - \varepsilon^2}$$

$$= \frac{2\pi^2 a^3}{2\beta^2} = \frac{\pi^2 a^3}{\beta^2}$$

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = a^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{4A^4}{a^2 4 \beta^2} = \frac{A^4}{\beta^2}$$

$$= a p = a \frac{2\beta^2}{a}$$

$$b^2 = \frac{c^2 T^2}{a^2 n^2}$$

$$\frac{c^2 T^2}{a^2 n^2} = a \frac{2\beta^2}{a}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2\beta^2 n^2}{a c^2}$$

$$= \frac{2n^2}{c^2} \frac{c^2}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \quad \left(1 + \frac{m}{M}\right)^3 = \frac{n^2}{k} \quad \frac{1 + \frac{m}{M}}{M}$$

$$\alpha = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\frac{2\beta^2}{a}}{1 - (1 - \frac{4\beta^2}{a^2})} = \frac{\alpha}{2\beta^2}$$

tożsamość ta jest tylko w energii kinetycznej
ale nie jest tożsamością z energią potencjalną
całkowitą.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2\beta^2 n^2}{a c^2} = \frac{2n^2}{a c^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$= 2n^2 \left(\frac{1}{a c^2} + \frac{m}{M a c^2} \right)$$

Jżeli więc masa m jest nieskończenie małą wobec M to będzie dotyczyła
wzoru III prawa Keplera. Tę najmniejszą planetę $\varphi \neq \delta \neq \sigma$
również jest nieskończona, ale przy $1 + \frac{m}{M} = 1000$, podobnie przy $\frac{1}{2}$ etc.
To jest wyłomaczeniem niedokładności danych, wspomnianych w tym prawie.

Do uzupełnienia tych samych rezultatów hybris naturalnie doszło wychodząc z
równań ruchu w układzie współrzędnych prostokątnych, tylko że wtedy rachunek
stał się dużo trudniejszy. Najgłębszymi dążeniami pokazało się
się, że wyniki mogą zasadać dwa równania energii i pól, bezpośrednio
bez wiedzy poprzedniej wywiezionych trzech zasad.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{k M m}{r^2} \frac{x' - x}{r}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k M m}{r^2} \frac{y' - y}{r}$$

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{k M}{r^2} \frac{x - x'}{r}$$

$$M \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{k M}{r^2} \frac{y - y'}{r}$$

$$67 \text{ Zwój: } M \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = -m \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2}$$

$$M \frac{dx'}{dt} + m \frac{dx}{dt} = c = 0$$

$$M x' + m x = c' = 0 \quad \text{itak samo dla } y = \text{zasada środka masy}$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{k}{r^2} \frac{xy' - yx'}{r} \\ M \frac{d}{dt} \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) &= \frac{k}{r^2} \frac{yx' - xy'}{r} \end{aligned} \right\} \text{A zatem:}$$

$$\begin{aligned} m(xy' - yx') + M(x'y' - y'x') &= \text{stała} \\ &= \text{zasada pól} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \left(dx \frac{dx}{dt} + dy \frac{dy}{dt} \right) + M \left(dx' \frac{dx'}{dt} + dy' \frac{dy'}{dt} \right) &= \frac{k}{r^2} (x'dx - x dx' + y'dy - y dy' \\ &\quad + x dx' - x' dx + y dy' - y' dy) \\ &= \frac{k}{r^2} \frac{d[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{dt} = \frac{k}{r^2} \frac{dr^2}{dt} = -\frac{2k}{r^2} \end{aligned}$$

$$m \left(dx \frac{dx}{dt} + dy \frac{dy}{dt} \right) + M \left(dx' \frac{dx'}{dt} + dy' \frac{dy'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{2k}{r} \frac{Mm}{1+\frac{m}{M}} \right]$$

$$m v^2 + M V^2 = \frac{m^2 v^2}{M}$$

$$v^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 = -\frac{2k}{r} M = \text{zasada energii}$$

Znamy jest problemat trzech ciał, do tychczas nie rozwiązany.

$$m_1 \frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt^2} = m_1 m_2 k \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + m_1 m_3 k \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} \quad \left\| \quad m_1 \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt^2} = \dots \right.$$

$$m_2 \frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt^2} = \dots$$

$$m_3 \frac{d^2 \tilde{x}_3}{dt^2} = \dots \text{ etc.}$$

9 równań różniczkowych drugiego rzędu; całki bezpośrednie mamy: 3 ruchy środka masy, 3 pól, 1 energii, więc pozostały 4 całek niezmiennych

$$(aZ) = \int aZ = aZ = AB \sim (10) = (Z(a)) \text{ konver.}$$



$$\begin{aligned} a(Z+C) &= aZ + ZC \\ &= A \cdot a(Z+C) \text{ disk.} \end{aligned}$$

mitte erzeugt

variabel $aZ = AB$

partiell $aZ = 0$ variable partiell

$$\left. \begin{aligned} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ i \cdot j = 0 \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots$$

$$aZ = A, B, \dots$$

$$aZ = a_1, a_2, \dots$$

$$(a+Z)(a+Z) = a^2 + Z^2 + 2aZ$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

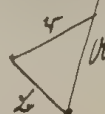
$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= \cancel{a^2 - b^2}^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\int aZ = 1 \text{ Preis}$$

variabel part
 $M = B + a \cdot p$



$$u = a \cdot p$$

$$u = Z + a \cdot p$$

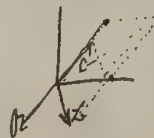
konvergenz

$$u = a \cdot p + Z \cdot p$$

$$u = C + a \cdot p + Z \cdot p$$

$$\left. \begin{aligned} M &= c_1 + a_1 \cdot p + b_1 \cdot p \\ u &= \dots \\ z &= \dots \end{aligned} \right\}$$

$$Var(Z+C) = A \cdot Var(Z+C)$$



$$i \cdot j = k$$

$$Var = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

Reguli vektorné skalárne

vekt. súčiniteľové, analýza do súmarných častí

$$|r| = |A| \cdot |B|$$

$$r = A \cdot B$$

2). množenie: delenie pomocou krížovej skalárnej

1). z ak rovnice

4). $r + z = c$ Diferencia

Rozčítaváme pomocou konstant.

$$r + z = z + r$$

$$(r + z) + c = r + (z + c)$$

$$z + c - r - c$$

$$r = z$$

$r + A$ nie má zmysel!

$$r = B$$

normálnosť
množením vektoru vektorom
 $\sum v = 0$

Rozkladame ~~vektor~~ $r = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$a_1 = |r| \cos(\alpha, i)$$

$$|r| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$\frac{d}{dt}$ konstanta k týmto výrazom; diera pre kríž

$$r = ix + jy + kz$$

$$\frac{dr}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} + k \frac{dz}{dt}$$

~~Skalárne~~ ~~vektorové~~

Príklad: $\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{r_1 - r}{t_1 - t} = v = \frac{dr}{dt} = \parallel \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = v \cdot v_1$

Príprava

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} + v \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dr}{ds} v_1 + v \frac{dv_1}{dt}$$

$$\frac{dv_1}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$v^2 \frac{dT}{ds}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ds}{R} = 1:R$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}$$

Stĺpcová jednotka

$$T_1 = \frac{dy}{ds}$$

$$|dT_1| = dy$$

Rovnica tangencie
 $r = f_1(t)$

Rovnica krivosti $r = f_2(s)$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M R^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$$

$$m r = R M$$

$$R = \frac{m r}{M}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \left(m + \frac{m^2}{M} \right) = \text{const} =$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{m(1 + \frac{m}{M})} = \mu \parallel \beta$$

$$m \left[\left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] + M \left[\left(R \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m M k}{r + R} + \text{const}$$

$$\left[\left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \left[m + \frac{m^2}{M} \right] = \frac{m M k}{r \left(1 + \frac{m}{M} \right)} + \text{const}$$

$$\left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{M k}{r \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2} + \text{const} = \frac{1}{2} \alpha + \beta \parallel \mu$$

$$\varphi + \beta = \arccos \frac{u}{A} = \arccos \frac{\sqrt{2\mu}}{A} \parallel \mu$$

$$u = -A \cos(\varphi + \beta)$$

$$\frac{\alpha}{2\mu} - \frac{k}{r} = -\sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{\alpha}{2\mu} + \sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \cos \varphi = \frac{k}{r}$$

$$r = \frac{\mu}{\frac{\alpha}{2\mu} + \sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \cos \varphi}$$

$$= \frac{\frac{2\mu^2}{\alpha}}{1 + \frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \cos \varphi}$$

$$\mu = \frac{2k^2}{\alpha}$$

$$I = \frac{2abn}{\mu}$$

$$\frac{I^2}{a^3} = \frac{4\pi n^2}{\mu^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 2 \frac{c^2}{n^2} \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2}{\mu^2} \parallel \mu$$

$$= \frac{4 \cdot 2 \frac{\mu^2}{\alpha} n^2}{\mu^2} = \frac{8\pi^2}{\alpha} = \frac{8\pi^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2}{M k}$$

$$\frac{I^2}{a^3 R^3} = \frac{4}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)^3} \parallel \mu$$

$$\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{2\mu} = \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{2\mu} = \frac{dr}{r^2}$$

$$\sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} = \frac{dr}{r^2}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{2\mu} + \sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}$$

$$u = \frac{M k}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)^2}$$

$$\beta =$$

$$\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \leq 1$$

$$\mu + \frac{\alpha^2}{4\mu^2} \leq \frac{\alpha^2}{4\mu}$$

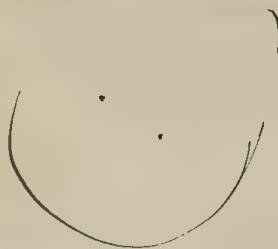
$$\mu \leq 0$$

#16

$$f_k = x_k - x_0$$

$$y_k = -$$

~~2~~



$$f = x - r \cos \theta$$

$$2 \cos' \quad \delta x = \delta p = 0$$

$$\delta x_k = \delta x - y_k \delta y$$

$$\delta y_k = \delta y + x_k \delta x$$

$$\delta x_k = \delta x$$

$$\cancel{y_k = y}$$

$$x_k = x - \frac{1}{2} r \cos \theta$$

$$y_k = y - \frac{1}{2} r \sin \theta$$

$$\delta x_k - \frac{1}{2} r \sin \theta \delta y = \delta x - (y_k - \frac{1}{2} r \sin \theta) \delta y$$

Jako przykład zastosowania tych praw można także uważać: zderzenie się wózków.

1). Najprościej przypadek, jeżeli ruch tych po poziomym prostym oś
 m_1, m_2, v_1, v_2 przed V_1, V_2 po zderzeniu
 z pierwszą zasadą wypływa:



$$I). m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

II). Już w niej zawarta, to przeliczeń obrotów, zachowana z jakiegoś dowolnego punktu bieżącego $(m_1 v_1 + m_2 v_2) a = (m_1 V_1 + m_2 V_2) a$

III). Jeżeli założymy że siły działające podczas zderzenia są zachowane wtedy musi energia ruchu pozostać niezmienną, to nastąpi więc jeżeli uderzenie będzie sprężyste (elastyczne). Wtedy:

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2}$$

Zapomocą tych dwóch równań można V_1, V_2 wyrazić jako funkcje z v_1 i v_2 :

$$\left. \begin{aligned} m_1 (v_1 - V_1) &= m_2 (V_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - V_1^2) &= m_2 (V_2^2 - v_2^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \quad \left| \begin{array}{l} -1 \\ +m_2 \end{array} \right.$$

$$(m_2 - m_1) v_1 + (m_2 + m_1) V_1 = 2m_2 v_2$$

$$\text{A zatem: } V_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{podobnie: } V_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

Nadzwyczaj tego rodzaju nazywa się elastycznym n.p. dwie kule bilardowe.

Jest one tylko wypadkiem idealnym bo w rzeczywistości zawsze pewna część energii zostaje straconą - albo w postaci zanieczyszczenia w cieple - wypadek idealny drugiego rodzaju t.j. jeżeli ^{jak najwięcej} energia zostaje rozpraszana nazywamy zderzeniem niesprężystym. Całkowita energia nie może być stracona ~~ale~~ bo musi być zachowany ruch środka masy.

Rozdzielamy więc ruch na ruch środka masy V i ruchy względnie do środka masy:

$$v_1' = v_1 - V = \frac{v_1 m_1 - v_2 m_2}{m_1 + m_2} m_2$$

$$v_2' = v_2 - V = \frac{v_2 - v_1}{m_1 + m_2} m_1$$

Łatwo teraz dowiedzieć że całkowita energia kinetyczna: $\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2$

jest równa energii kinetycznej ruchu środka masy $\frac{m_1 + m_2}{2} V^2$

plus energii ruchów względnie do środka masy: $+ m_1 \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_2'^2}{2}$

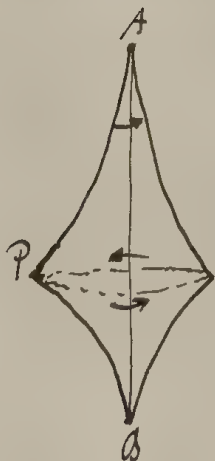
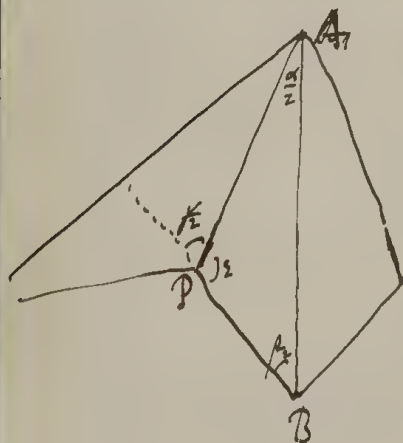
ponieważ istotnie

$$\frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_1 \frac{(v_1 - v_2)^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2 (v_2 - v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad \text{q. e. d.}$$

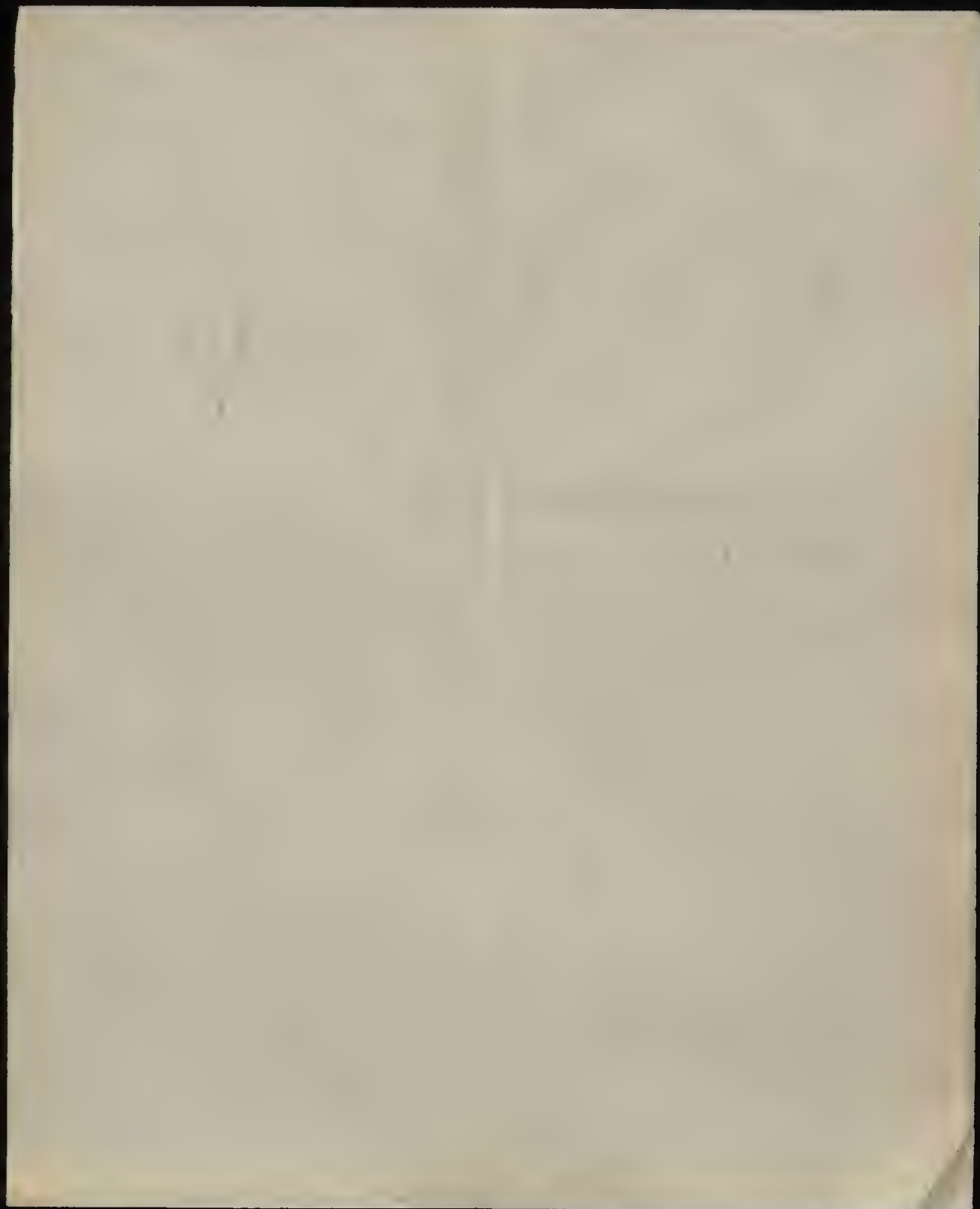
Paralelogramm

61



$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{\alpha}{2} + \omega_2 \frac{\beta}{2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$\omega_1 = \omega_1 \frac{\alpha}{2} - \omega_2 \frac{\beta}{2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$



63 70

Wzrost najmniejsza energia możliwa hydrii jądli rach odnosnie do środka
masy hydrii zero, a zatem jądli $V_1 = V_2 = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

To jest więc prawo ~~uderzenia~~ uderzenia niesprężystego (kula zgliny misiekij).

Je prawo wyrażaliny ~~z~~ z całek ogólnych ruchu, moine by naturalnie
tak samo i z badanie bezpośredniego niż dostatecznych przy zdarzeniu.

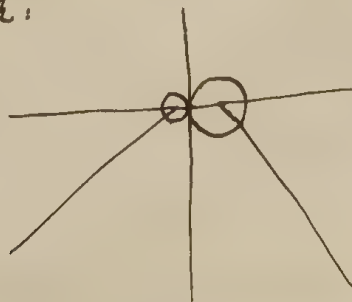
Jądli ruchy nie są ograniczone do prosty: zdarzenie ukośne:

Różnicie noliy zdarzenie centryczne i obokone

centryczne i obokone ukośne

Pierwsze jądli sity wywołane idą przez resp. środki mas, zatem cała
nie nolią jednego ruchu wirującego wokół ich. N. p. kule jednorodnie
zawrze zderają się środkowo. Wtedy to samo prawo moine zastosować
w dwóch rozmiarach.

Albo takie tak:



Lecznica środków

Wtedy cały ruch wrtęży moine
na stałowe wzdłuż i poprzecznie
do Lecznicy środków (Centrallinii)
(Stożki) (Stożki)

Pierwsze wrtęży niezmiennicze, drugie wrtęży przez przesłanie prędkości.

Przy zdarzeniu excentrycznym noliy zwrócić się nastąpi ruch wirujący
wzrost trzeba dodać w drugim równaniu momenta prędkości obrotowej
z tego pochodzący.

Przechodźmy do mechaniki wścisłych ciał sztywnych.
 Tak narysowany cięta state, jeżeli sprężystość ich tak wielka, że można zaniedbać może zmiany kształtu zachodzące wskutek sił, więc jeżeli obrotowania są małe. Można uważać te ciała jako stożone z nieskończoną ilością punktów i wtedy można rozstrząsać je same rozważa, które prowadzimy jako wzajem dla układów punktów.

Jeżeli wtedy są wszystkie ze sobą w pewnym nieskończonym połączeniu. Musimy najpierw poznać ile z tych punktów może uważać jako niezależne zmienne, i jak inne od nich zależą t.j. możemy się zapoznać z kinematyką ciał sztywnych.

I. Pomyślmy cięta ośrodek przez pewnego trzech punktów {drwiące odpowiednich do pew-
 tego 3 odległości nieskończonych, wś-
 wścisłości tych 6 dowolnych stopni swobody.

I. Cięta można wprowadzić w jakąś bądź dowolną pozycję rozpoznać jednego przesunięcia punktu dowolnego i dwóch obrotów, z których obrotowych się do punktów dowolnych.

Dowolny punkt A przez przesunięcie



(Takie wszystkie punkty opisujące drugi obrot) o punkt A'

potem obrot około jakiejś osi tak że B w B', a następnie C w C' wtedy i wszystkie inne punkty znajdują się w przybliżonych pozycjach.

Jeżeli wykonano się II. Dwa dowolne obroty około osi przechodzących przez jeden punkt można także w ~~jednym~~ ^{zastąpić} obrotem około osi zawsze znaleźć punkty (leżące na jednej osi) które poruszyły się mimo to nieruchomo

Obroty o kątach α i β kątów B

$$a \sin \frac{\alpha}{2} = b \sin \frac{\beta}{2} \quad a:b = \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

Wykresliny najwzajemnie kąt pod kątemi

$\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ od ~~tego~~ punktu

Wtedy punkt P powstaje w nowym przekroju

Wzrostu innego punktu zao' nowego nowego przekroju

N. p. punkt A w kątach obrót kąt B

III Zatem można zastąpić one dwa obroty jednym obrotem kątów OP wielkości

$$\omega \frac{\alpha}{2} = \omega \frac{\alpha}{2} \omega \frac{\beta}{2} = r_1 \frac{\alpha}{2} r_2 \frac{\beta}{2} \omega \epsilon$$

Obracanie się zaliczy jednemu od tego w jakim przekroju te obroty następują, gdyby najpierw $O(P)$ potem $A(\alpha)$, wtedy ~~we~~ OP musi być liczyć z przeciwną stroną.

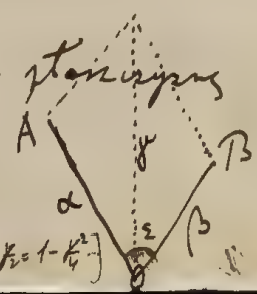
IV. Zatem można sprowadzić do dwóch przekrojów z odpowiednim jednym przekrojem punktu dowolnego i obrót kąt tego punktu.

V. Jeśli obroty są nieskończenie małe, wtedy $a:b = \alpha:\beta$ i punkty P i P' w przekroju $A O B$, zatem $\sin \mu : \sin \nu = \alpha:\beta$

Zatem konstrukcja.

do kierunku temu odpowiada

a tak samo i wielkości (wstawiając $\omega \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}$)



Znowu kierunek się wyprędkający znowu przez przekrojem 2

równoległy bok wykreślony na odinkach równych obrotom składowym i położonych w kierunku ich osi. Wynika z tego i wielkość obrotu wypadkowego odpowiada obrotu składowemu wyrażona 2

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8} \quad \cos \frac{\beta}{2} = 1 - \frac{\beta^2}{8} \quad \text{etc.}$$

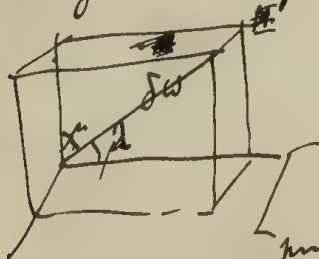
Kolij u której następuje obrotu niekierunek może być dowolny

$$1 - \frac{\alpha^2}{8} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right) \left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right) - \frac{\alpha}{2} \frac{\beta}{2} \cos \epsilon$$

$$= 1 - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\alpha\beta}{4} \cos \epsilon$$

$\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \epsilon$ co jest to nie wyraża 2 owej konstrukcji prometrycznej. Zatem 4 obroty składowe i wypadkowe są jako wektory, przez dodawanie prometryczne.

VI Zatem każdy obrot ^{niekierunek może} rozłożyć można na 3 składowe wzdłuż osi X, Y, Z wzdłuż konstrukcji równoległych równoległościom.



$$\delta \omega \begin{cases} \delta \alpha = \delta \omega \cos \alpha \\ \delta \beta = \delta \omega \cos \beta \\ \delta \gamma = \delta \omega \cos \gamma \end{cases}$$

Zatem to także bezprzecznie prowadzi N.p.

punkt M wzniesień wypadkowego obrotu $\delta \omega$ tylko przesunąć się w przestrzeni XY o długości $\delta \omega \cdot \delta \omega \cos \alpha \sin \alpha$ i t.j.

Wskutek $\delta \alpha$ przyszedł do góry. $\delta \alpha \cdot \delta \omega \cos \alpha \sin \alpha$ ~~nie~~ $\delta \beta \cdot \delta \omega \cos \beta = 0$

W przestrzeni dwute tylko $\delta \gamma$: $\delta \gamma \cdot \delta \omega \cos \gamma = \delta \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma$ to samo jak tu

W przestrzeni dwute tylko $\delta \gamma$: $\delta \gamma \cdot \delta \omega \cos \gamma = \delta \omega^2 \cos \gamma \sin \gamma$ to samo jak tu

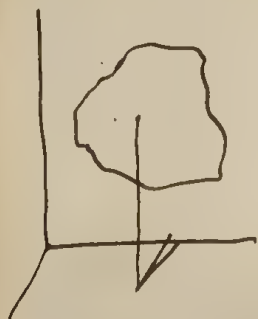
Składowe te same obroty niekierunek może przez resztę odpowiada otrzymamy.

my przekłoni chwilowe, więc wszę to co mówiliśmy co do nich odnoszą się również i do przekłoni obrotów.

VII Zatem ~~każdy~~ ruch ciała sztywnego można przedstawić sobie jako złożony z prędkości translacyjnej (^{postępowej} prędkości), (którą można znów rozłożyć na 3 składowe) i z ~~składową~~ prędkości obrotowej ~~określonej~~ (analogicznie składowej nie z 3 składowych). Naturalnie wygłębienie będzie i kierunku i wielkości tych prędkości, ale prędkości w każdym momencie ruchu będą tego ~~sam~~ rodzaju jak śruby w murze t.j. skrzytem śrubowym (tylko że oś obrotu nie będzie miała tego samego kierunku jak prędkości prędkości).

VIII Co do sensu w którym ruch się odbywa trzymamy się dawniej wymienionych postawień. + w kierunku trybuzonów

IX Wzr. ogólny przypadek przesunięcia:



$$\delta x \quad \delta y \quad \delta z, \quad \delta \alpha \quad \delta \beta \quad \delta \gamma$$

$$\begin{cases} \delta x + 2\delta\beta - y_k\delta\gamma = \delta x_k \\ \delta y + x_k\delta\gamma - z_k\delta\alpha = \delta y_k \\ \delta z + y_k\delta\alpha - x_k\delta\beta = \delta z_k \end{cases}$$

Jeżeli punkt przez którego pójdzie oś obrotu nie uległ zmianie dookoła tego stosunku do warunków zadania to można obrać kierunek prędkości równy kierunkowi osi ($Z = oś$ obrotu).
 $\delta x_k = \delta x - y_k \delta \gamma$
 $\delta y_k = \delta y + x_k \delta \gamma$
 $\delta z_k = \delta z$
 Określenie stosunku y_k, x_k t.j. stosunku punktów opóźniających
 można zrobić $\delta x = \delta y = 0$, zatem
 możemy mieć $\delta x = \delta y = 0$, zatem

Mówimy także tak: ciało sztywne ma 6 stopni wolności

Tyle co do kinematyki ciał sztywnych. Teraz dynamika:

I Równowaga: $\sum (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0$

$$\delta x \sum X_k + \delta y \sum Y_k + \delta z \sum Z_k + \delta \alpha \sum (y_k Z_k - z_k Y_k) + \delta \beta \sum (z_k X_k - x_k Z_k) + \delta \gamma \sum (x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

Pracownicy jest całkowicie dowolne, więc równowaga może tylko istnieć jeżeli pojedyńczo

$$75 \quad \sum X_k = 0 \quad \sum Y_k = 0 \quad \sum Z_k = 0$$

$$\sum (y_k Z - z_k Y) = 0 \quad \sum (z_k X - x_k Z) = 0 \quad \sum (x_k Y - y_k X) = 0$$

Ważc nie wystarczy żeby sumy się były $= 0$, także i całkowite momenty się muszą być $= 0$. Zresztą przejdziemy teraz do kinetyki, jako ogólniejszego działu.

$$\sum \left(m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} - \vec{F}_k \right) \delta \vec{r}_k \dots = 0$$

~~$$\text{Teraz bierzemy miedzy: } \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + z_k \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - y_k \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \vec{r}_k$$~~

~~$$\begin{aligned} & \left(\sum X_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k z_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k y_k \right) \delta x + \\ & + \left[\sum (z_k X_k - x_k Z_k) - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k z_k + \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} (\sum m_k z_k^2 + \sum m_k x_k^2) \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k y_k z_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k y_k \right] \delta y + \dots = 0 \end{aligned}$$~~

Zatem:

~~$$\sum X_k = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k z_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k y_k$$~~

~~$$\begin{aligned} \sum (z_k X_k - x_k Z_k) &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k z_k x_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k z_k - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} (\sum m_k z_k^2 + \sum m_k x_k^2) - \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k y_k z_k \\ &\quad + \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \sum m_k x_k y_k = 0 \end{aligned}$$~~

(i 4 inne które otrzymamy przez przemianę $x y z$)

Te równania będą skorygowane znacząco jeśli jako punkt którego przemianę uważamy przez $\delta x \delta y \delta z$ i przez który przechodzi os' obrotu $\delta x \delta y \delta z$ bierzemy środek mas, więc jeśli wprowadzimy współrzędne punktów ciała odnośnie do środka mas:

Przeznaczmy więc jako równanie ruchu:

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{x}_k}{dt^2} = \sum \vec{X}_k$$

$$\left(\sum m_k \left(x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) = \sum x_k Y_k - y_k X_k \right)$$

Jeżeli same jak powyżej ułożymy punktem
ośmiem to były tylko pojedynczym z ciał
tęż jest ciałem ruchu przez nie jest określony

Wobec naszego poprzedniego zadania będzie polegało na przedstawieniu lewej strony
tych równań. Tymczasem będziemy się zajmowali najprzód prawą stroną.

Widziemy więc że co do sił, ich działaniu ^{czyli obrotów i przemieszczeń} zależy tylko od wartości tych
sił

tych wyrazów, które już dawniej poznaliśmy jako składowe siły
ciężkości i składowe momenty całkowitego.

Jżeli więc dwa układy sił pod tym względem są równe, to one równe
działanie wywierają. Naszym jest $\sum X_k = X, Y, Z$

$$\sum (x_k Y_k - y_k X_k) = R, P, Q$$

Jeżeli X, Y, Z można uważać jako składowe siły $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ i mamy już dowód
 $X = F \cos \alpha$ etc.

Również poprzedniośmy wspomnieliśmy to samo co do P, Q, R : $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$
i możemy je uważać jako momenty i przemieszczenia

$$\text{N.p. } R = x Y - y X = \sum F (x \sin \alpha \sin \beta - y \sin \alpha \cos \beta) \quad 2 \left\{ \frac{1}{r} \right\} \sum F \left\{ \frac{x}{r} \right\}$$

Jeżeli to S ma znaczenie?

$$S = \sum F \sqrt{(x \sin \alpha \sin \beta - y \sin \alpha \cos \beta)^2 + (y \sin \alpha \sin \beta + x \sin \alpha \cos \beta)^2 + (\dots)^2}$$

$$= \sum F \sin(\alpha \beta)$$

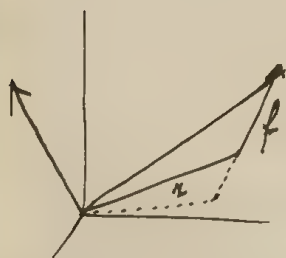
S niezmienny moment siły względem tego punktu (α), jest on równy
iloczynowi z r i $f \sin(\alpha \beta)$ odległości i siły prostok. do niej

albo f i $r \sin(\alpha \beta)$ siły i odległości najkrótszej z pozostałych
złożonych do kierunku siły

Kierunek S : $\frac{Q}{S} = \frac{\omega r \cos \beta - \omega \lambda \cos \gamma}{\sin(\alpha \beta)} = \omega(SX)$

to znaczy że $S \perp r$

(toteż dowiódł że $\omega r S = \omega(SX)\omega \lambda + \omega(SY)\omega \mu + \omega(SZ)\omega \nu = 0$)
 $\therefore \cos \beta S = \omega(SX)\omega \alpha + \dots = 0$



miera momentu jest obrót ~~około~~ tej kąt (f_2)

a kierunek \perp

Z tej definicji jak również z innych wyrazów $XXZ \neq PR$

wynika że dostrzeżenie porządku niezmienności jeżeli siły przesunąć się o ich własnym kierunku t.j. jeżeli punkt przyczepienia siły przesunąć się o kierunek tejże. Momenty się są równe jeżeli kierunek równy i obrót równy.

Do równowagi nie wystarczą ich wypadkowe całkowite $= 0$ ale także moment $= 0$

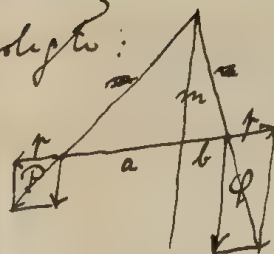
Te zasady można również dać: „syntheticzny sposób wyderić t.j. z pomocą tak zw. par sit (dwójek sit Fobiana)

Parę sit narysowaną dwie siły równoległe ale o przeciwnych kierunkach jeżeli punkty przyczepienia nie leżą o ich kierunku

Jeżeli do jednego punktu równie siły przyczepione to zawsze można je równoważyć przez jedną siłę (przeciwnej wypadkowej) przyczepioną do tego samego punktu.

Takie i jeżeli do różnych punktów przyczepione to można znaleźć pewien punkt w którym je przyczepiając jedną siłę można stworzyć równowagę.
 — Ale tylko jak długo wszystko w jednej płaszczyźnie! —

Takie jest równoległe:



$$a : m = p : P$$

$$b : m = p : Q$$

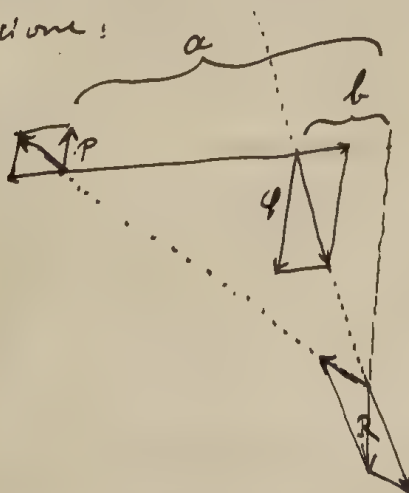
$$a : m = p : P$$

$$b : m = p : Q$$

$$a : b = Q : P$$

To same jest skutkiem

przebiegu:



Wtedy tak samo równanie ↑

ale jeżeli $Q = -P$ wtedy nie można znaleźć takiego punktu; musi być on dalej w o.

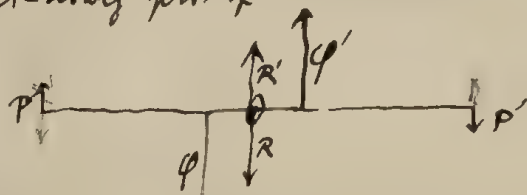
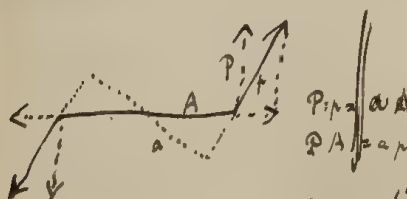
Wice dratwinę przy sit nie można przenieść do tej samej części, przy czym jest jeden sit.

$$R' + P = Q$$

$$a : b = P : Q$$

~~Dratwinę~~ Przy sit można zastąpić inną o tym samym momencie
jeżeli siłami równymi składowej prostopadłej do ramienia.

$$OQ : OP = P : Q$$



Mogą być dwa takimi (przebiegiem) przeniesienie sit nastąpi równowaga jeżeli
ilość i z ramienia i składowej prostopadłej są te same ↑

$$P : Q \text{ ramię} = R$$

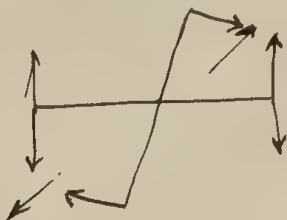
$$P' : Q' = R' = -R$$

$$\text{zatem } \sum = 0$$

zatem ten iloczyn stanowi miarę

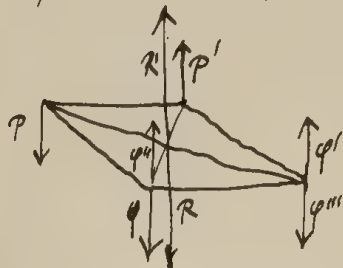
dratwinę przy sit; jest to
stała w tym momencie sit.

29 Parę sił można zastąpić taką samą jedną siłą ^{namias i siły, które one opadają kąt} ~~złożoną z nich~~ ~~złożoną z nich~~



(to zastępnika jest z defonacji momentu)

Parę sił można przesunąć w przestrzeni



$$\left. \begin{aligned} P\varphi''' &= R \\ P'\varphi'' &= R' = -R \end{aligned} \right\} = 0$$

zostaje $\varphi\varphi'$

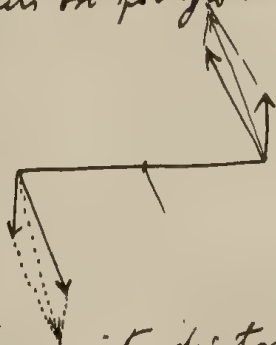
Tak samo i w przestrzeni jeżeli tylko oś proste II

Zatem można je dowolnie obracać i przesunąć ~~na płaszczyźnie~~ tylko oś musi zostać równoległa.

Parę sił z równą oś dodaje się, dodając ich momenta.

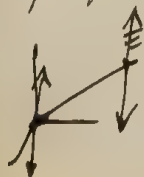
to przesunięcie
o tę samą pozycję
do trzeciego
a sumy sił.

Jeżeli oni podchylone:



Zatem przez geometryczne obliczanie (lub
z pomocą ~~na~~ równoległoboku).

Tę samą siłę działającą na pewnym punkcie można zastąpić parą sił działającą
na punktach współrzędnych: parę parę sił



Tak można postąpić z każdą siłą; to potem otrzymać w
całkowitych siłach wypadkowych: parę sił wypadkowych.

Widać, że to ich wartości relatywne działaniom sił, co jest ten sam rezultat
jaki powstał

Tyle co do dotarcia sił. Teraz co do układu mas:

Uproszczenie znaczące wprowadzając współrzędne środka

~~W jednym wypadku~~ ^{Gy} można zastąpić dowolną wypadkową i parę wypadkową przez jedną siłę przyłączoną do punktu stosownie obranego?

Albo co jest to samo: czy można je równoważyć przez taką siłę?

$$\begin{array}{l} 0 = X + \cancel{F_{wx}} \quad \bar{X} \\ 0 = Y + \cancel{F_{wy}} \quad H \\ 0 = Z + \cancel{F_{wz}} \quad Z \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 = P + (4 F_{wy} - 2 F_{wx}) \\ 0 = Q + (2 F_{wx} - x F_{wy}) \\ 0 = R + (x F_{wy} - y F_{wx}) \end{array}$$

Zdaje się więc jakobyśmy mieli 3 równania dla 3 niewiadomych (~~4-2+1=3~~)

Ale nie jest tak w rzeczywistości, bo nie są one niezależne: Uchcąc n.p. wyznaczyć ~~jedną~~ z ~~z~~ IV; V otrzymamy z równania II nie równanie dla x i y lecz: $PX + QY + RZ = 0$

Tylko pod tym warunkiem więc można rozwiązać to zadanie.

Co on znaczy? $X = F_{wx} \dots$ ~~ale~~ $P = \Pi \text{ wzd}$

Więc $(w_{dx} w_{dy} + \dots) = 0$ więc $(X F_{\Pi}) = 90^\circ$

to znaczy że siła wypadkowa musi leżeć w płaszczyźnie momentu wypadkowego, inaczej nie można wcale zastąpić tego układu jedną jedyną siłą.

Wróćmy teraz do naszych równań: zajmijmy się ich lewą stroną:

Znacząc uproszczenie przez wprowadzenie współrzędnych środka ~~mas~~ ~~bez~~ ~~uśrednienia~~.

$$x_k = \xi + x_n \quad y_k = \eta + y_n \quad z_k = \zeta + z_n$$

81) Zamiast K ujętym dla symetrii takiemu mamy $\sum m_n x_n = \sum m_n y_n = \sum m_n z_n = 0$ $\sum m_n = M$

Również $\sum m_n \frac{dx_n}{dt}$ i $\sum m_n \frac{dy_n}{dt} = 0$ itd. Stwierdzamy więc:

$$\begin{array}{l|l} M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = X & \eta \sum m_n \frac{d^2 \tilde{x}_n}{dt^2} \\ M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = Y & \sum m_n \left[(\eta + y_n) \left(\frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} \right) - \dots \right] = \dots \sum [y_n + \eta] \tilde{z}_n - \dots \\ M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = Z & \eta \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} \sum m_n + \eta \sum m_n \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} + \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} \sum m_n y_n + \sum m_n y_n \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} - \dots \end{array}$$

Zatem:

$$\left(\eta \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} \right) M + \sum m_n \left(y_n \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} - z_n \frac{d^2 \tilde{y}_n}{dt^2} \right) =$$

$$= \eta Z - \eta Y + \sum (y_n \tilde{z}_n - z_n \tilde{y}_n)$$

Zatem:

$$\begin{array}{l} \sum m \left(y_n \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} - z_n \frac{d^2 \tilde{y}_n}{dt^2} \right) = P \\ \sum m \left(z_n \frac{d^2 \tilde{x}_n}{dt^2} - x_n \frac{d^2 \tilde{z}_n}{dt^2} \right) = Q \\ \sum m (\quad) = R \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{To są równania ruchu} \\ \text{analogiczne do poprzednich tylko} \\ \text{że zamiast współrzędnych } x, y, z \\ \text{mamy } \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \end{array} \right.$$

To znaczy więc że ruch ~~ten~~ prosty w punkcie momentów sił (d. j. obrotowy) odbywa się w układzie ten sam sposób jak jeżeli środek bezwładności jest ustalony i znów te same siły przyciągające jak przedtem. A znów z poprzednich równań wynika że ruch środka bezwładności ~~staje się~~ odbywa się bez względu na ruch obrotowy. Tak jak gdyby w nim były potężne wagotnie magnety. Widać że dwa rodzaje ruchu w układzie są od siebie niezależne. Ten ostatni

obycie się wziętych tych samych praw jakich punktów motorycznych o
miejscu $M = \frac{1}{2} m_1$, więc wziętych prawidła nam daje znowu, więc będziemy się
nadać zajmować tylko drugimi rozważaniami.

Alte nejprve! musíme jít na návštěvu k jaké osobě, a jak se jí máme chovat.

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$$

$$y = \dots$$

$$m_K = \rho \, dv$$

$$\xi = \frac{\int \rho x dv}{\int \rho dv}$$

$$y = \frac{\int \rho y \, dv}{\int \rho \, dv}$$

9-

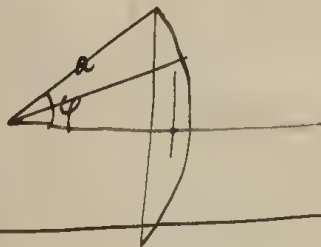
Sp do Sp do homogen

Zwykle przyjmujemy ε stała p jako ~~stałą~~ ^{stale} (wzta jednokodne) ~~wartość~~ ^{wartość} ~~uz~~.

Wednesday $\xi = \frac{\int x dv}{\int dv}$ etc.

Little line element: $ds = g ds$ $g = \text{mass in state } ds$ $\xi = \frac{x ds}{\int ds}$

Linie proste v smědku. Línk koto.



$$\xi = \frac{2 \int_0^{\varphi} a \, d\varphi \cdot a \cos \varphi}{2a\varphi} = a \frac{\sin \varphi \Big|_0^{\varphi}}{\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}$$

$$\text{N. f. } \varphi = \frac{\pi}{2} : \quad \gamma = \frac{2a}{\pi}$$

Lieta pīrākā:

$$dw = \delta df$$

$$\xi = \frac{\iint x \, df}{\iint df}$$



Wynik z kół: $\xi = \frac{2}{a^2 \varphi} \int_0^T k^2 d\varphi dr \cos \varphi.$

$$f = \frac{2}{a^2 \varphi} \int_0^a r^2 dr \sin \varphi$$

$$= \frac{2 \sin \varphi}{a^2 \varphi} \int_0^a r^2 dr = \frac{2 a \sin \varphi}{3 \varphi}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$f = \frac{4a}{3\pi}$$

83. bismek kola

$$\xi = \frac{\int_y^a x dx}{\int_{x=ay}^a dx} = \frac{\int_{ay}^a \sqrt{a^2-x^2} x dx}{\int_{ay}^a \sqrt{a^2-x^2} dx} = \frac{-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}}{a \omega \varphi} = \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{3} a^3 \sin^3 \varphi}{\frac{a^2 \varphi}{2} - \frac{a^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2}} = \frac{\frac{2}{3} a \sin^3 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\xi = \frac{\frac{2}{3} a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\xi = \frac{\iiint x dv}{\iiint dv}$$

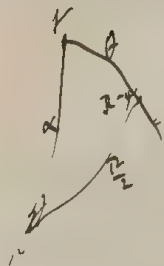
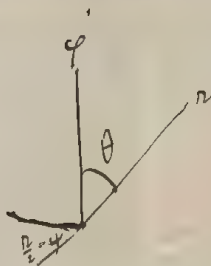
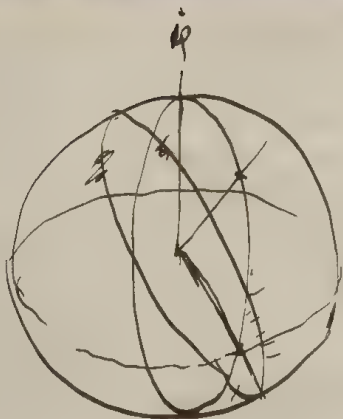


Wysinek kuli:

$$dv = r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dr \, d\varphi$$

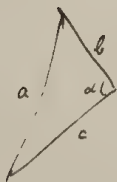
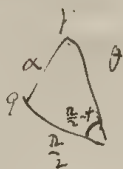
$$\frac{\iiint r^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\varphi \, dr}{\iiint r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dr \, d\varphi} = \frac{\iiint r^3 dr \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\iiint r^2 dr \sin \varphi \, d\varphi} = \frac{\frac{a^4}{4} \frac{\sin^2 \varphi}{2}}{\frac{a^3}{3} \cos \varphi} \Big|_0^\varphi$$

$$\xi = \frac{\frac{3a}{8} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \cos \varphi}}{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 3a$$



$$\cos \theta = \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \cos(\pi - \varphi)$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \varphi$$



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$1 - \frac{a^2}{2} = 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + ab \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$K \frac{d\varphi}{dt} = M g \varphi$$

$$\frac{K}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + M g l \cos \varphi = M g l \cos \varphi_0$$

$$\frac{K}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M g l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

$$\approx M g l \frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2}$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{\sqrt{K}}{M g l \sqrt{\varphi^2 - \varphi_0^2}}$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{\sqrt{K}}{M g l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 t}{d\varphi^2} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{K}}{M g l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{5/2}}$$

$$\frac{d^3 t}{d\varphi^3} = \frac{15}{8} \frac{\sqrt{K}}{M g l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{7/2}} + \sin^2$$

$$\varphi = \varphi_0 + t \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 + \frac{t^2}{2} \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)_0 + \dots$$

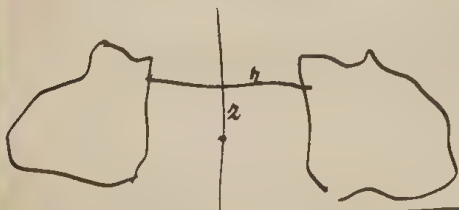
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{t^2}{2} \frac{M g l}{K} \varphi_0$$

$$1 + \delta = 1 + \frac{t^2}{2} \frac{M g l}{K}$$

$$t = \sqrt{\frac{K}{M g l}} \sqrt{2\delta}$$



Oczywiście przy obrocie możemy przyjąć dwie zasady, Guldina, odnoszące się do cięć stałych:



$$O = \int 2\pi r \, ds = 2\pi \int \frac{r \, ds}{ds} \int ds = 2\pi R_0 S$$

$$V = 2\pi \iint r \, dr \, ds = 2\pi \int \frac{r^2 \, dr}{dr} \int ds = 2\pi R_0^2 O$$

Nacznym tuż do nich obrotowego, który się wzięte będzie odwrócić jak gdyby się dalek bezwzględności był utwierdzony. Wtedy mamy jeszcze niezmiennie 3 obrotowe przemieszczenia z tym 3 stopnie wolności.

Najprościej wyprowadzić przykład, dany ^{ciężar} prędkości z pojęciem momentu.

Niech usto będzie utwierdzone w dwóch punktach m. tak że z nim jest połączona oś obracająca się w dwóch (ciężkości) nasadach. Wtedy wzięte jest jeden stopień wolności. Przesuwamy oś jako Z, wzięte X jako przesuwany obrot.

Wtedy oś o' będzie wyrażała tani momenta przemieszczenia P' i φ' i $P + P' = 0$; $\varphi + \varphi' = 0$, R natomiast niezmiennie.

Zatem: $\frac{d}{dt} \sum m_n (x_n \frac{dx_n}{dt} - y_n \frac{dy_n}{dt}) = R$

Wprowadzamy wtedy biegunowy: $x_n = r_n \cos \varphi_n$ $y_n = r_n \sin \varphi_n$

$$\frac{d}{dt} \sum m_n r_n^2 \frac{d\varphi_n}{dt} = R$$

$$\varphi_n = \varphi + \varphi_n$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = 0$$



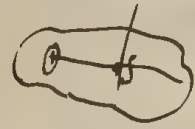
obliczamy jakiej stopy
kierunek w dół
samym at który
nie z obrotu

Zatem:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m_n r_n^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = R = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sum m_n r_n^2$$

To nasz ogólny moment bezwzględności K_0

Moment bezwładności dla osi równoległych:



Jeżeli nie to że ~~zobaczamy~~ mamy K względem osi przechodzącej przez środek masy S , a szukamy K względem innej osi równoległej o odległości a .

$$K_0 = \int (x^2 + y^2) dx dy dz \quad \int x dx dy dz = 0 = \int y dx dy dz$$

$$K = \int [(a+x)^2 + y^2] dx dy dz = a^2 \int dx dy dz + 2a \int x dx dy dz + \int (x^2 + y^2) dx dy dz$$

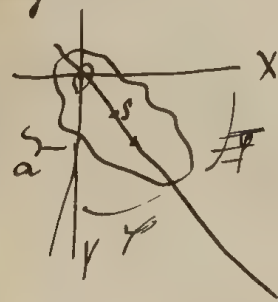
$$= a^2 M + K_0$$

N.p. $K = \cancel{M \frac{MR^2}{4}} + M \frac{R^2}{2}$

Wzr. najprościej wyznaczyć K dla osi przechodzącej przez środek masy

Zatem promień bezwładności: $R = \sqrt{a^2 + R_0^2}$

Przykład: Walec o fizycznym



Jako linia odniesienia odczytujemy promień z 0 do S

Moment siły $R = \sum (x_n V_n - y X)$

Co do sił równoległych, przyporządkowanych do mas:

$$V_n = \rho \cdot dV_n \quad V = \sum V_n = V_0 M$$

$$R = \cancel{M a} \rho \left(V_0 \int x_n dV - \int y_0 dV \right) = \rho (V_0 \xi - \cancel{X_0}) \int dV$$

$$= M V_0 \xi$$

Wzr. Ataki siły działającej w ten sposób jak gdyby całkowita masa $M V_0$ była przypisana w środku bezwładności

Wzr. tutaj ten sam moment jak gdyby ciężar Mg działał w punkcie S

$$R = \cancel{M a} - \xi M g = - a M g \sin \varphi$$

Zatem:

2 zasady energii mechanicznej: $\frac{1}{2} K \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \sum mgy = \text{const}$

i przy różniczkowaniu $K \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} + M g \frac{dy}{dt} = 0$

$$K \frac{dy}{dt} = -M g a \sin \varphi$$

zupelni to same równanie jakie mieliśmy przy ułożeniu matematycznym

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{M g a}{K} \sin \varphi \quad \text{jeżeli się postawi} \quad \frac{1}{L} = a \frac{M}{K}$$

Zatem czas wahania: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{aM}{gK}} = 2\pi \sqrt{\frac{K}{agM}}$

N. p. jeżeli mamy linijkę matematyczną $K = \frac{K^2}{3} M \quad a = \frac{b}{2}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g}} \quad \text{t.j.} \quad \text{tak samo jak ułożono matemat. o długości} \frac{2b}{3}$$

To samo można otrzymać z dawniejszego naszego rachunku ułożenia ułożenia 2 w punkcie

Jeżeli kule przyspieszają do ustaleń o przekroju punkty

W ogólnym wypadku ułożenia punktu przez który o przechodzi:

$$K = K_0 + a^2 M$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{agM} + \frac{a}{g}}$$

Wzrost ∞ dla $a=0$ i dla $a=\infty$

wzrost między tym muszą być zawsze dwie

wartości długości a dla pewnego T

Jeżeli założymy teraz:

$$g \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{K_0}{aM} + a$$

$$a^2 - a \frac{gT^2}{4\pi^2} + \frac{K_0}{M} = 0$$

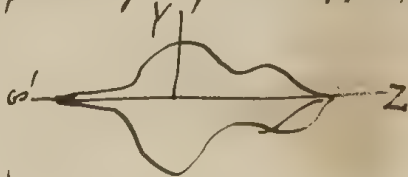
$$a = \frac{gT^2}{8\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gT^2}{8\pi^2} \right)^2 - \frac{K_0}{M}}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{gT^2}{8\pi^2} \quad \text{zatem: } T = 2\pi \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}}$$

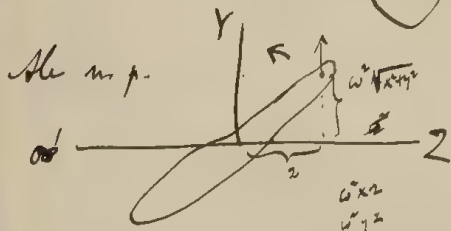
Tutaj ani masa M ani K_0 nie wchodzi
zatem tak jak matematycznym ułożeniu
długości $a_1 + a_2$

89

Jżeli coś symetryczne toś on ^{wie} coś rotacyjne, albo jeżeli symetryczne względem płaszczyzny przechodzącej przez oś, to oczywiście te momenty deńacyjne = 0



to każdemu +2 odpowiada równo -2



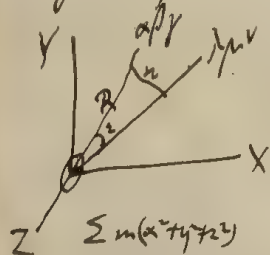
$$\sum m y^2 > 0$$

$$P = \text{prędkość ciała} = 10$$

Jżeli znamy K dla pewnej osi, jeżeli będzie K dla osi przechodzącej przez ten sam punkt?

$$K \omega^2 = \text{const}$$

rezygnując z uwagi kinetycznej



$$K = \sum m r^2$$

$$= \sum m R^2 \sin^2 \epsilon = \sum m R^2 (1 - \cos^2 \epsilon)$$

$$= \sum m \left(\frac{R^2}{\cos^2 \epsilon} \right) [1 - (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu)^2]$$

$$= \sum m R^2 - \cos^2 \lambda \sum m x^2 - \cos^2 \mu \sum m y^2 - \cos^2 \nu \sum m z^2 - 2 \cos \lambda \cos \mu \sum m x y -$$

$$- 2 \cos \mu \cos \nu \sum m y z - 2 \cos \nu \cos \lambda \sum m z x$$

$$1 - \cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda = \cos^2 \mu + \cos^2 \nu$$

$$= \sin^2 \lambda \sum m x^2$$

$$K = \underbrace{\cos^2 \lambda \sum m (y^2 + z^2)}_{K_x} + \underbrace{\cos^2 \mu \sum m (z^2 + x^2)}_{K_y} + \underbrace{\cos^2 \nu \sum m (x^2 + y^2)}_{K_z} - 2 \cos \lambda \cos \mu \sum m x y - \dots$$

$$K = \frac{A \xi^2 + B \eta^2 + \dots}{\rho^2}$$

$$(\mathbb{K} \rho^2) = A \xi^2 + \dots = 1$$

Wzrostając się wykresie słupkowy o osiach

$\frac{1}{\rho^2}$ str. to K dla jakiegokolwiek osi

$$\text{jest } K = \frac{1}{\rho^2}$$

elipsoidal momentów; osi główne

Wzrę wyrostki figury krystalowej kształtu regularnego mają K równe wartości 0
 niezgodnego 0 0 etc.

Jedną wzrę obieramy osi główną jako osi współrzędnych: $A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + C\bar{z}^2 = 1$

Wzrę osiągnięcia momenta deriwatywny = 0, przy rachunku różniczkowym kątów nie będzie potrzeba zindeksowanych parametrów (na osi) wzrę gdyż to osi wolne ruch

Wzrę rozkład mas ^{opłoni} $E = \frac{1}{2} K \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ w ciele poruszającym się tylko o tyle m. wpływ na ruch, o ile wpływają na wartości trzech wielkości A B C i ~~DEF~~ (te ostatnie można sprowadzić na pierwsze?). ~~Tę~~ wzrę całkowite energia kinetyczna ~~całkowicie~~ da się wyrazić:

$$E = \frac{1}{2} \sum \left[m_n \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + \dots \right]$$

$$+ \delta x_0 + \delta y_0 + \delta z_0 \quad \text{wzrę:} \quad \frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n - y_n \frac{d\alpha}{dt} - z_n \frac{d\beta}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum m_n \left\{ \dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 - 2 \dot{x}_n \dot{y}_n \frac{d\alpha}{dt} + \dot{x}_n^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \dot{y}_n^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 - 2 \dot{x}_n \dot{y}_n \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \right.$$

$$\left. + \dot{y}_n^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \dot{x}_n^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 - 2 \dot{x}_n \dot{y}_n \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \sum m_n (y_n^2 + z_n^2) + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \sum m_n (x_n^2 + z_n^2) + \dots - 2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} \sum m_n y_n z_n - \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 K_x + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 K_y + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 K_z - 2 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} D_x - \dots \right\}$$

Nasze równanie dla ruchu obrotowego ma postać: $\frac{d}{dt} \left(K_x \frac{d\alpha}{dt} \right) = P$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 [K_x \cos^2 \lambda + K_y \sin^2 \lambda + \dots]$

K_x = I_x = m r² sin² λ

Jeżeli zaś jako osi współrzędnych wybierzemy osie główne, wtedy momenty dwiaxowe będą zero; predkimi obrotowe w tym wypadku będziemy maszynali p, q, r

$$\text{Zatem } E = \frac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

Wtę widac że ogólny wyraz energii ~~jest~~ zależy tylko od 3 głównych momentów; z tego można już wnioskować że i momenta dwiaxowe muszą się dać wyrazić za pomocą A, B, C . Istotnie mamy:

$$D_2 = \sum m x y = \iiint x y \, dx \, dy \, dz =$$

x, y, z wyrażone dwoma kierunkami ξ, η i kierunkami osi głównych

$$x = \xi \cos(\xi x) + \eta \cos(\eta x) + \zeta \cos(\xi x)$$

$$y = \xi \cos(\xi y) + \eta \cos(\eta y) + \zeta \cos(\xi y)$$

$$dx \, dy \, dz = d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

gdzie ξ, η, ζ współrzędne w kierunku osi.

$$= \iiint \left[\xi^2 \cos \xi x \cos \xi y + \eta^2 \cos \eta x \cos \eta y + \zeta^2 \cos \xi x \cos \xi y + 2 \xi \eta (\cos \xi x \cos \eta x + \cos \xi y \cos \eta y) + 2 \eta \zeta (\cos \eta y \cos \xi y + \cos \eta z \cos \xi z) + 2 \xi \zeta (\cos \xi z \cos \xi z + \cos \xi x \cos \xi x) \right] d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

$$\cos \xi x \cos \xi y + \cos \eta x \cos \eta y + \cos \xi x \cos \xi y = 0 \quad ||$$

$$= \iiint \left[(\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cos \xi y + (\eta^2 + \zeta^2) \cos \eta x \cos \eta y + (\xi^2 + \zeta^2) \cos \xi x \cos \xi y - (\xi^2 + \eta^2) \cos \eta x \cos \eta y + \dots \right]$$

$$= \iiint -(\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cos \xi y - (\eta^2 + \zeta^2) \cos \eta x \cos \eta y - (\xi^2 + \zeta^2) \cos \xi x \cos \xi y + \dots$$

$$D_2 = -C \cos \xi x \cos \xi y - A \cos \xi x \cos \xi y - B \cos \eta x \cos \eta y$$

$$\text{ponieważ } \iiint \xi \eta \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \text{ etc.} = 0$$

Wniosek: Trzeba do ogólnego równania dodać:

$$\frac{d}{dt} \left(K_x \frac{da}{dt} \right) = P \quad \frac{d}{dt} \left(K_y \frac{dp}{dt} \right) = Q$$

Te równania o tyle nie są dofredne że wielkość K_x w każdym momencie się zmienia zależnie od kształtu Δ obrotu, więc różniczkując trzeba pisać:

$$\frac{dK_x}{dt} \frac{da}{dt} + K_x \frac{d^2a}{dt^2} = P$$

~~W tym momencie się myśli~~ Tymczasem jeżeli K jest równe w wszystkich kierunkach (lub jeżeli przypadkowo zależnie od kąta odchylenia się kątów jest równy), uproszczają się one na równanie:

$$K \frac{d^2a}{dt^2} = P \quad K \frac{d^2p}{dt^2} = Q \quad K \frac{d^2r}{dt^2} = R$$

W tych równaniach jest zawarte to co napisany wyżej: słowność do zachowania pędu wzdłuż ~~st~~ wirowania:

Jeżeli $P = Q = R = 0$ będącym nishi:

$K \frac{da}{dt} = \text{stała}$ i podobnie inne dwa; dla wygody pisaćmy oś V oś obrotu najprościej:

$$K \frac{da}{dt} = 0 \quad K \frac{dp}{dt} = B \quad K \frac{dr}{dt} = 0$$

(impuls)
produkcji τ

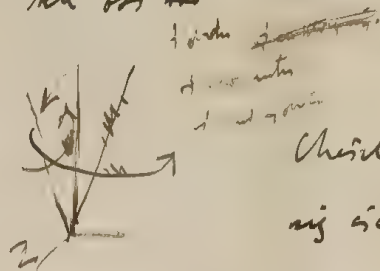
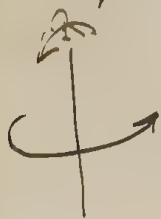
Tę teraz chcemy ~~o~~ obrotu oś obrotu, przyjmując pierwszy moment R ; gdyby cięło nie wirowało, to one padeło się o osiowym momentem i przyjęłoby podobny obrotu, $K \frac{R}{K}$ kąt oś R . Tymczasem to co nastąpi?

$$K \frac{da}{dt} = 0 \quad K \frac{dp}{dt} = B \quad K \frac{dr}{dt} = R$$

$$K \frac{dr}{dt} = R \tau = \phi \quad (\text{miałe})$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{R \tau}{K} = c \quad \left(\begin{array}{l} \text{gdyż, owa stała jest} \\ \text{ta sama, ponieważ} \end{array} \right)$$

93)
 Teraz więc ~~my~~ obrot ciałach przyjąć się, by dani $\sqrt{B^2 + C^2}$ a oś obrotu
 będzie przechodziła przez oś ~~z~~ Z



Chciliśmy obrotu ~~do~~ oś ~~X~~, a ponieważ
 się cięło ~~do~~ oś Z

$$\cos \epsilon = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

$$\sin \epsilon = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

$$\text{żurich } C \text{ mody} = \frac{C}{B}$$

Ważne zdaniem od prędkości obrotu B i będzie w ogóle nadejść żurich. D wiadomości,
 więc zdaje się jak gdyby cięło wyrażało pewną reakcję przeciwko obrotowi;
 zachowanie kierunku osi. Ciekawym zjawiskiem jest gdyby nie było obrotu

żurich zaś K nie jest równe w wyrażeniu kierunku to one równania nie
 są praktyczne; można je przekształcić wprowadzając to co w nich K a będzie
 wyrażone przez $\sin \epsilon$ i $\cos \epsilon$, ale to bardzo skomplikowane. Wskazuje się zaś
 myśl, czy się nie wprowadzić znaczenia przez odwołanie obrotu do osi
 głównych, ponieważ wtedy K są stałe. Ale wtedy kierunek osi, które
 których prędkości obrotu są p p z będzie zmieniały. Zatem zadanie:

Przebieganie momentów obrotowych i takie się rozbiegi na kierunku
 zmienia osi. Zupewni się podobnego natężenia żurich zaś przy wartościach
 przyspieszenia na przyspieszenie stykający i w kierunku normalnym.

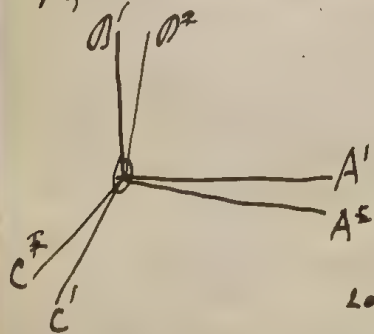
$$\omega = \frac{d\psi}{dt}$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{R}$$

Tak i tutaj: (w pewnym momencie t i stajemy się nętnymi w
 przedstawieniu robu potężnia daleko) żyje osi ~~z~~ głównie

Enajste potrdimo, da so merni radijski momenti istega reda;
 merimo je: P Q R
 Teoretično ugotovimo, da so radijski momenti istega reda, saj so vsi trije radijski momenti istega reda, saj so vsi trije radijski momenti istega reda.

Ugotovimo, da so radijski momenti istega reda, saj so vsi trije radijski momenti istega reda, saj so vsi trije radijski momenti istega reda.



Na upravljanje z Δt ; Δt moment bo dalj in

$A(q + \Delta q)$ ali toliko in drugi krmilnik, v

A^2 v krmilnik ali A up. da toliko $A(q + \Delta q)$ in AOA'

zato prihaja do tega, da je radijski moment istega reda

Leto in $O : C : + B(q + \Delta q) (O'DA) + C(r + \Delta r) \cos C'OA$

$$\text{torej: } \angle AOA' = \Delta t \sqrt{q^2 + r^2} > \frac{\pi}{2}$$

$$\text{vzame } \cos(AOA') \text{ kot vzde: } (1 - \delta^2) = 1 - \Delta t^2 (q^2 + r^2)$$

$$\text{mimo miast: } AOA' = \frac{\pi}{2} + r \Delta t$$

$$\cos AOA' = \cos(\frac{\pi}{2} + r \Delta t) = -r \Delta t$$

$$AOC' = \frac{\pi}{2} - q \Delta t$$

$$\cos AOC' = \cos(\frac{\pi}{2} - q \Delta t) = q \Delta t$$

W. e. t. v. z.:

$$P = \frac{A(q + \Delta q) [1 - \Delta t^2 (q^2 + r^2)] - Aq + B(q + \Delta q) r \Delta t + C(r + \Delta r) q \Delta t}{\Delta t}$$

$$= A \frac{dq}{dt} + (C - B) q r = P \quad \text{Izrazimo:}$$

$$B \frac{dr}{dt} + (A - C) r q = Q \quad \text{Izrazimo:}$$

$$C \frac{dq}{dt} + (B - A) q r = R$$

Te krzywe stoją zakreślone na powierzchni elipsoidalnej bezładności
narysowany polski dyg.

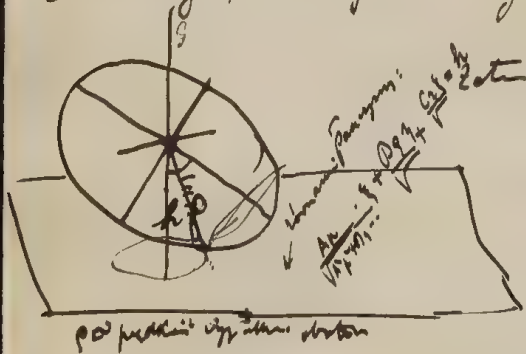
(Przypadek II)

Na ten nie koniec: z pierwszego równania

$$p \cdot \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + D_1^2 + C_1^2}} + p \cdot \frac{D_2}{\sqrt{D_2^2 + C_2^2}} + r \cdot \frac{C_2}{\sqrt{C_2^2}} = \frac{W E_0}{\sqrt{5 W}}$$

$C_1 = A_1 + D_1 + C_2 = const.$

to są też momenty obrotowe ^{składowe} podłożone przez moment całkowity, zatem
równają się ^{dostawia} każdemu z tych elementów osi p, q, r i osi momentu
całkowitego, która jak wiemy z dawniej jest niesumienne.



$$p \cos(pG) + q \cos(qG) + r \cos(rG) = state$$

$$p = \frac{\sqrt{E}}{\cos(pG)} \quad state, \quad state$$

$$p \cos(pG) = state = h =$$

Zatem odległość punktu O od płaszczyzny (L G) stycznej jest state.

Teraz więc że cała ta krzywa się obraca się elipsoidalnie bezładności
będzie się dotykała płaszczyzny niesumiennej ^{pozostaje u niesumiennej odległości od niej.} momentu wypadkowego.

Linia punktu O i punktu styczności oznacza kierunek osi chwilowej
obrotu. Będzie ona zakreślana na osi elipsoidalnej krzywą zwaną polodigą —
a naturalnie punkty styczności na płaszczyźnie niesumiennej będą tworzyły inną
krzywą (płaską) prostą ^{nie symetryczną!} zwaną krzywą dyg.

Widzimy że ~~polodiga~~ polodiga jest osiową i ma ^{nie symetryczną} kształt krzywej, a ~~krzywa~~ krzywa jest niesumiennej i jest ^{nie symetryczną} krzywą.

p = od chwilowego obrotu i ten moment całkowity jest niesumiennością
 krzywa jest to nie krzywa elipsoidalna, ale krzywa dyg

§7 Vinný ~~travaj~~ tvoj jezik potvrdi, cisto z rasom by dalie zognavati, ale dodati nam jine o ediciji d rasom. W tym ista treba ucthovai rovnice Euler

W oghnyj vyppadku stegynije sig funkcyje slupky esse:

$$\begin{aligned} p &= a \cos \psi & p &= a \cos(\lambda t + \mu) \\ q &= b \sin \psi & q &= b \sin(\lambda t + \mu) \\ r &= c \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} & r &= c \Delta \cos(\lambda t + \mu) \end{aligned}$$

(Winkelmann I p. 92)

Bruch III p. 24

Jedli zas cisto rotacynne: $D=C$:

$p = \text{stete}$

$$D \frac{dq}{dt} + (A-D) r p = 0$$

$$D \frac{dr}{dt} + (D-A) r q = 0$$

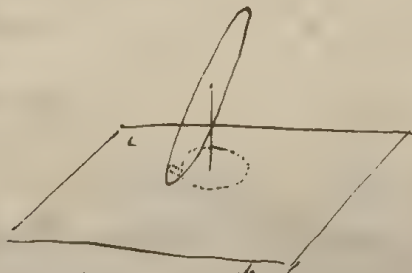
$$\left. \begin{aligned} D \frac{dq}{dt} + (A-D) r p &= 0 \\ D \frac{dr}{dt} + (D-A) r q &= 0 \end{aligned} \right\} D^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + (A-D)^2 p^2 q = 0$$

$$q = c \cos(\lambda t + \mu) \quad r = c \sin(\lambda t + \mu)$$

} jekni jineze stete treba ozvuzi

zeta zna sig i potvrdie ori chvilovij p, a razom ozq kanti konstanty geometrycznej i potvrdie ori jthovnyh, sig i vata samej.

Jedli zas drictajz momenty sit to zadanie natychdivie vate skopk kovaine.



$$D^2 x^2 + (A-D)^2 p^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{A-D}{D} p$$

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi D}{p(A-D)}$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + c^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + c^2}} = \text{const} \quad \text{ne zghur ori stete}$$

tu diti sam minijne vime: $A=D$, sam natychdivie predkati kati
v vime $A=D$ diti p diti $T = \infty$ dardba ogetnyje
minimie

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t$$

$$z = z'$$

$$\delta x = \delta x' \cos \omega t - \delta y' \sin \omega t$$

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = \dot{x}' \cos \omega t - y' \sin \omega t - \omega x' \sin \omega t - \omega y' \cos \omega t$$

etc.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} \cos \omega t - \frac{d^2 y'}{dt^2} \sin \omega t - 2\omega \frac{dx'}{dt} \sin \omega t - 2\omega \frac{dy'}{dt} \cos \omega t - \omega^2 x' \cos \omega t + \omega^2 y' \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \dots + \dots + \dots - \dots - \dots - \dots$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z'}{dt^2}$$

$$\sum \left[\delta x' \left\{ m \frac{d^2 x'}{dt^2} - X' - m \omega^2 x' - 2m\omega \frac{dy'}{dt} \right\} + \delta y' \left\{ m \frac{d^2 y'}{dt^2} - Y' - m \omega^2 y' + 2m\omega \frac{dx'}{dt} \right\} + \delta z' \left\{ m \frac{d^2 z'}{dt^2} - Z' \right\} \right] = 0$$

ωy is zero everywhere $m \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \text{into absolute.}$

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{1}{r} + 2\omega \frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = -\frac{1}{r} - 2\omega \frac{dx'}{dt}$$

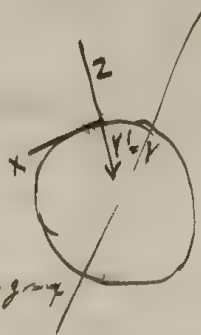
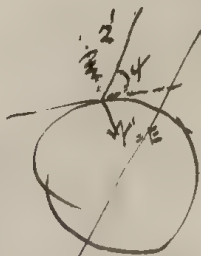
$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = Z'$$

$$X' = Y' = 0 \quad Z' = g$$

$$x = x' \cos \omega t - z' \sin \omega t$$

$$y = y'$$

$$z = x' \sin \omega t + z' \cos \omega t$$



$$z = g \cos \omega t \quad t=0 \quad z' = g \cos \omega t$$

||

$$x \cos \omega t + z \sin \omega t = x'$$

$$x \sin \omega t - z \cos \omega t = z'$$

$$x' = -x \sin \varphi - 2 \cos \varphi$$

$$z' = x \cos \varphi - 2 \sin \varphi$$

$$\gamma' = \gamma$$

$$-\frac{dx}{dt} \sin \varphi - \frac{dz}{dt} \cos \varphi = -g \cos \varphi + 2\omega \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} \sin \varphi - \frac{dz}{dt} \cos \varphi = + \cancel{2\omega \left[\frac{dx}{dt} \sin \varphi - \frac{dz}{dt} \cos \varphi \right]} - g \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega \left[\frac{dx}{dt} \sin \varphi - \frac{dz}{dt} \cos \varphi \right]$$

$$\frac{dx}{dt} = + 2\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\omega \left[\frac{dx}{dt} \sin \varphi + \frac{dy}{dt} \cos \varphi \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = -g + 2\omega \cos \varphi \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{0} + 2\omega \sin \varphi \cdot y \quad \cancel{2\omega \sin \varphi \cdot y}$$

$$\frac{dz}{dt} = g + g t + 2\omega y \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta + 2\omega(x \sin \varphi + y \cos \varphi) t + \omega \cos \varphi t^2 + \dots$$

$$x = \alpha t + \omega \beta \sin \varphi \cdot t^2$$

$$y = \beta t + \omega (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) t^2 + \omega \cos \varphi \frac{t^3}{3}$$

$$z = \gamma t + \left(\frac{g}{2} - \omega \beta \cos \varphi \right) t^2$$

$$\text{Nur } \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$x = 0$$

$$y = \omega \cos \varphi \frac{t^3}{3}$$

$$z = \frac{g t^2}{2}$$

Roth Freiburg

$$\varphi = 50.271^\circ \quad g = 981.4 \quad | \quad z = 158 \text{ m}^5$$

$$y = 2.75 \text{ cm}$$

$$\text{inclination } 2.84$$

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0$$

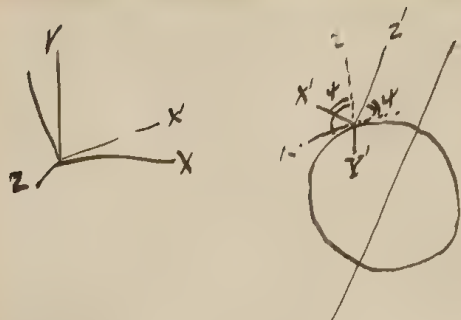
$$x = \alpha t$$

$$y = \alpha \omega \sin \varphi t^2 + \omega \cos \varphi \frac{t^3}{3}$$

$$z = \frac{g t^2}{2}$$

$$x = 0 \quad \gamma = 0$$

$$x = \beta \omega \sin \varphi \cdot t^2$$



$$\begin{aligned} \bar{z} &= z - g \sin \phi \\ z' &= g \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\bar{z} \sin \phi - z' \cos \phi) + 2\omega \sin \phi \frac{dy}{dt} = 2\omega \sin \phi \frac{dy}{dt} + 2x \\ \frac{dy}{dt} &= H - 2\omega (\sin \phi \frac{dx}{dt} + \cos \phi \frac{dz}{dt}) = -2\omega (\sin \phi \frac{dx}{dt} + \cos \phi \frac{dz}{dt}) + 2y \\ \frac{dz}{dt} &= (\bar{z} \cos \phi + z' \sin \phi) + 2\omega \cos \phi \frac{dy}{dt} = -g + 2\omega \cos \phi \frac{dy}{dt} + 2(2\omega l) \end{aligned}$$

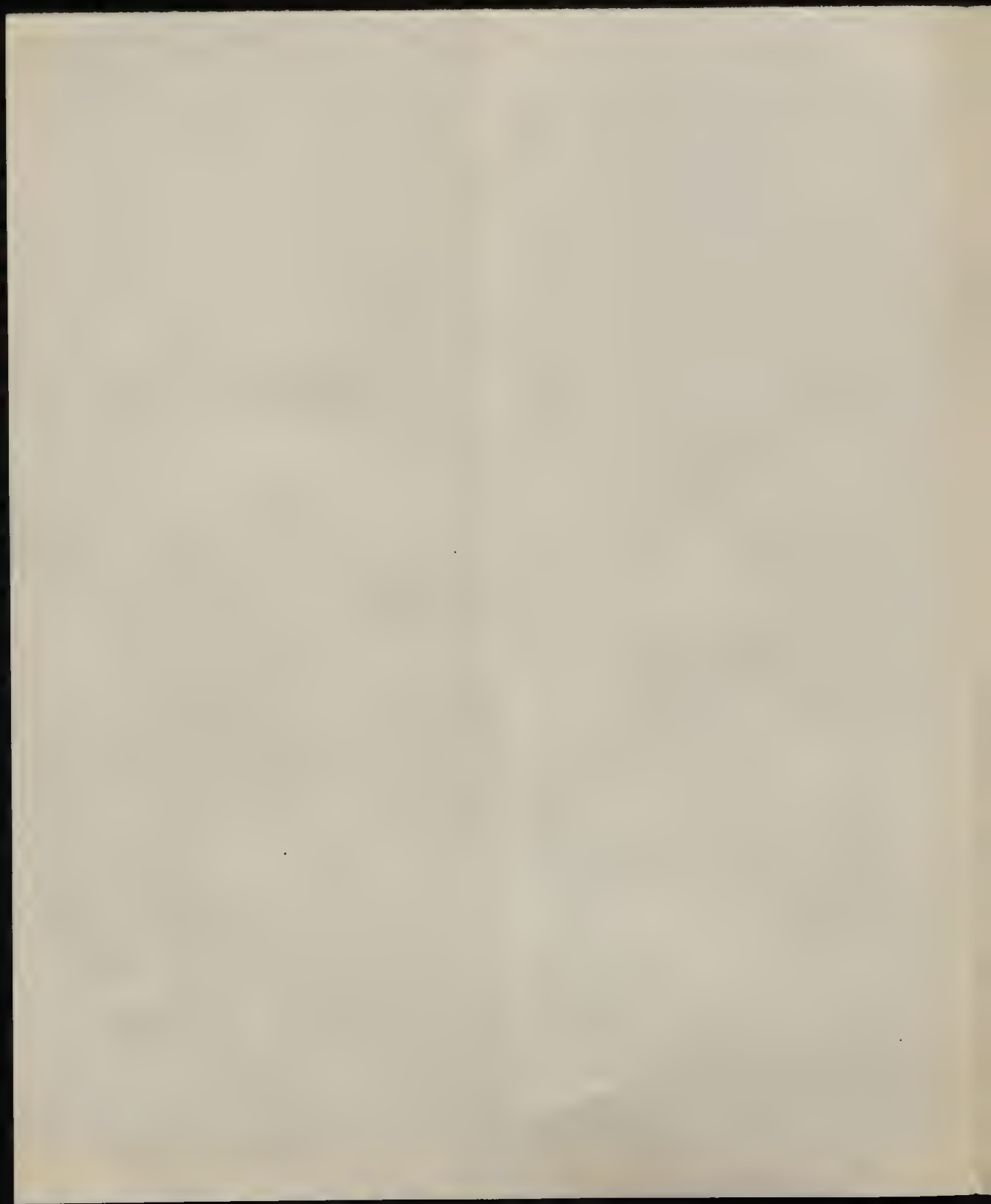
$$\begin{aligned} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} &= (2gz + H) \\ r \frac{dr}{dt} - y \frac{dz}{dt} &= 2\omega \sin \phi \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) + 2\omega \cos \phi \cdot x \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta \\ x &= r \sin \theta \cos \phi + y \sin \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi + z \cos \phi \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} &= \frac{g}{2} (\cos \theta + \sin \theta) + H \\ x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= (r + r \sin \theta \cos \phi) \\ r^2 \frac{d\phi}{dt} &= r \cos \theta \\ \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{g}{2} r^2 + H \right) \frac{1}{r} \\ \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{g}{2} r^2 + H \right) \frac{1}{r} - 2\omega \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= c \\ \left(\frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{g}{2} r^2 + H \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{g}{2} r + \frac{H}{r} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{g}{2} r + \frac{H}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{g}{2} r + \frac{H}{r} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{g}{2} - \frac{H}{r^3} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{g}{2} - \frac{H}{r^3} \end{aligned}$$



$$- \dots \gamma_s \frac{r_e}{r_e} - (\gamma_s \frac{r_e}{r_e}) \frac{r_p}{p} =$$

$$\underbrace{\gamma_s \frac{r_e}{r_e} + \gamma_s \frac{r_e}{r_e}}_{\gamma_s = \gamma}$$

$$\gamma_s = \dots + \gamma_s \cdot (\frac{r_e}{r_e}) \frac{r_p}{p} \sum$$

$$\frac{r_e}{r_e} = \frac{r_e}{r_e} - (\frac{r_e}{r_e}) \frac{r_p}{p}$$

$$\frac{r_e}{r_e} - \frac{r_e}{r_e} = \frac{r_e}{r_e} \frac{r_p}{p} =$$

$$\frac{r_e}{r_e} + \frac{r_e}{r_e} \frac{r_p}{p} = \frac{r_e}{r_e} \frac{r_p}{p} = \frac{r_e}{r_e}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{q}$$

$$\delta L = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right)$$

$$= \int (\dot{q} \delta q + q \delta \dot{q}) = \int \frac{d}{dt} (q \delta q) + \int (\dot{q} \delta q - q \delta \dot{q})$$

$$\delta \left(\underbrace{\int q \dot{q} dt}_H - L \right) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = q$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 \varphi^2$$

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 \varphi^2$$

$$t = p$$

$$p = m \dot{\varphi}$$

$$L = m \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{m \omega^2 \varphi^2}{2} - \frac{1}{2} m \omega \varphi$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} m \omega^2 \varphi = -\frac{1}{2} m \omega^2 \varphi = -m \omega^2 \varphi \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} &= \dot{\varphi} = p = \dot{\varphi} \end{aligned} \right.$$

$$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k + \sum A_c \frac{\partial \varphi_c}{\partial x_k} \quad |$$

$$\varphi_c(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} x_k' + \dots \right) = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \ddot{x}_k + \dots \right) = \Phi = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \ddot{x}_k + \dots \right) = \Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{x}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) (\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0}) = 0$$

$$\sum (m \ddot{x} - X) \delta \ddot{x} + \dots = 0$$

$$\sum (m \ddot{x} - X) \delta \ddot{x} + \dots = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{x}} + \dots \right) \delta \ddot{x} = 0$$

$$L_0 = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{2c^4} - \frac{v^6}{6c^6} + \dots$$

$$L = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{2c^4} - \frac{v^6}{6c^6} + \dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{c^2} v - \frac{1}{2c^4} v^3 + \frac{1}{2c^6} v^5 - \dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{c^2} v$$

$$\theta = \frac{1}{c^2} v$$

$$\theta = \frac{1}{c^2} v$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{c^2}$$

$$\theta = \Phi(t) e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt =$$

$$r \frac{\partial T}{\partial r} + T + V = \text{const}$$

$$\int \left[\frac{\partial T}{\partial r} \delta r + \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} \right] dt + T \delta t_1$$

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial r} \delta r + \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \delta r \right) + \sum \frac{\partial T}{\partial r} \delta r$$

$$\sum \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) \delta r + \frac{\partial T}{\partial r} \delta r \right]$$

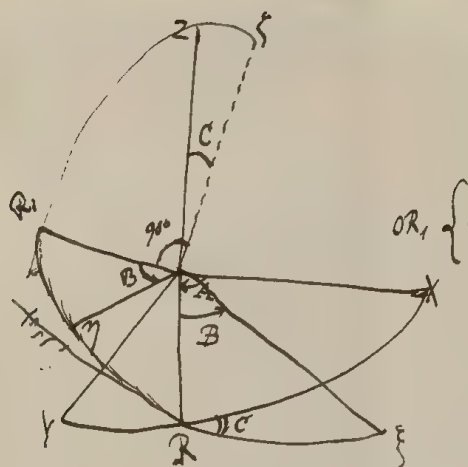
$$= \delta r \frac{\partial T}{\partial r} - \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) \delta r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) + \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$U + T = E = \text{const}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial V}{\partial r}$$



	δA	$\delta \alpha$	$\delta \beta$
$O\alpha$	$-\sin \alpha \delta C$		$\cos \alpha \delta C$
$O\beta$	$\cos \alpha \delta C$		$\sin \alpha \delta C$
$O\gamma$	$\sin C \delta A$	$-\delta \alpha$	

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = -\sin \alpha \delta C \cdot A' + \cos \alpha \cdot C' \quad \left| \quad = \omega \cos(\alpha \xi) \right.$$

$$\mu = \frac{dy}{dt} = \cos \alpha \delta C \cdot A' + \sin \alpha \cdot C' \quad \left| \quad = \omega \sin(\alpha \eta) \right.$$

$$\nu = \frac{dz}{dt} = \sin C \cdot A' - C' \quad \left| \quad = \omega \sin(\alpha \zeta) \right.$$

$$T = \frac{1}{2} \left[G \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + H \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + J \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} [G\mu^2 + H\nu^2 + J\lambda^2]$$

$$= f(A', \alpha', \beta')$$

$$(\lambda = 0)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = -\frac{\partial T}{\partial \nu} = -J\nu$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) = \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) = -J \frac{d\nu}{dt} = -(G+H) \lambda \mu + H$$

$$H \frac{d\lambda}{dt} = (J-G) \lambda \nu + E$$

$$G \frac{d\lambda}{dt} = (H-J) \mu \nu + D$$

FOR

83

$$i^2 + p^2 + r^2 = \omega^2$$

C

—
R

—
SC

$$D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$A = -$$

$$= \theta$$

$$\delta \int (T - V) dt = 0$$

$$\int \left(\frac{\partial(T-V)}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

$$\delta t \frac{\partial T}{\partial t} = \int \delta t \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

$$\frac{d}{dt} \dots$$



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \left(\frac{m_1 m_2}{r^3} \right) r = 0$$

$$x_1 = a \cos \phi$$

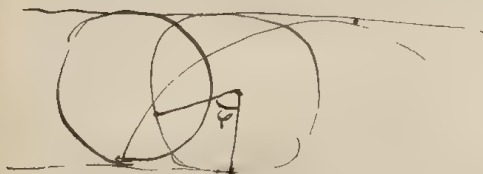
$$(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \frac{d^2 \phi}{dt^2} - (m_1 a_1 + m_2 a_2) \phi \frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2} \phi$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0$$

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = 0$$



$$x = a(\phi - \pi/2)$$

$$y = a(1 - \cos \phi)$$

$$x = y$$

$$x = a(\pi - \phi + \pi/2) = a(\pi/2 - \phi)$$

$$y = a(1 + \cos \phi) = a(1 - \cos \phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(1 + \cos \phi) \frac{d\phi}{dt} = 2a \cos \frac{\phi}{2} \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= a \sin \phi \frac{d\phi}{dt} = 2a \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2a \sqrt{1 - \cos \phi} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}$$

$$s = 2a \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a s \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2a \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \phi}} \left(\frac{ds}{dt} \right) + 2a \sqrt{1 - \cos \phi} \left(\frac{ds}{dt} \right) \bigg| \sqrt{1 - \cos \phi} = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a \left(\frac{ds}{dt} \right) + 2a s \frac{d\phi}{dt} \bigg| s \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$s \frac{ds}{dt}$$

$$M C_0 (1 + \alpha t) d\theta = \alpha (1 + \rho \theta)^2 dt$$

$$\frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta^4 - \theta_0^4$$

$$\theta_0^4 + 4\theta_0^3 \tau + 6\theta_0^2 \tau^2 + \dots - \theta_0^4$$

$$r_f \quad s = a c t$$

$$\omega = \frac{a^2}{2} c t$$

$$\omega = \frac{a}{2} s$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dw = y dx - x dy$$

|| Ale adretnie x, y mi dać niy wygrał puz s, ω

Ale bier i adnij tródnosi iámená. Zep sz vózne up. jít jít
qúáredu obzrenny póluchiniú w re atypú $l_1 + l_2$ oddáw d dónú
dough púktú



$$\begin{cases} l_1 + l_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\ \omega = ay \end{cases}$$

Chodzi o celkownosci toh same jít puz vózná kótorná áto mi kótorná

$$2L = \dot{r}^2 \left(\frac{dy}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2$$

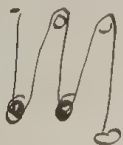
Tryba

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4r$$

$$m \left[\frac{d\dot{r}}{dt} - r \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{F}{r} - \frac{D}{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2r\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$



$$2L = m \dot{r}^2 + m_L \dot{r}_L^2 + m_g \dot{r}_g^2$$

$$2x_L + 2x_g + x_s = l$$

$$m \frac{d\dot{r}}{dt} - r \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{c}{r}$$

zostało obliczyć $\frac{\partial L}{\partial r}$ i $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ i wstawić do równań Lagrange'a. Potem trzeba będzie wyznaczyć \dot{r} i $\dot{\varphi}$ z tych równań. To jest trochę trudne, ale można to zrobić, jeśli tylko nie będzie zbyt dużych problemów z rachunkami.

Cała sprawa w p. jako równanie różnicowe: 1. r

$$2. \int r^2 d\varphi = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$L = \left[\dot{r}^2 + \frac{\dot{\omega}^2}{r^2} \right] \frac{m}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{m \dot{\omega}^2}{r^3}$$

$$m \left[\frac{d\dot{r}}{dt} + \frac{1}{r^3} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

nie, bo wiadomo, że $\frac{d\omega}{dt}$ zależy od r i $\dot{\omega}$, więc nie da się wyznaczyć r z ω bez $\dot{\omega}$.

ale nie da się wyznaczyć r z ω bez $\dot{\omega}$.

Wtedy trzeba będzie użyć równań różnicowych.

$$\text{Jest to } r = \varphi(t)$$

$$\omega = \varphi(t)$$

istotnie nie jest ruchem okrężnym

$$\text{bo wtedy } r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$$

$$\varphi = \int \frac{\varphi'(t)}{[\varphi(t)]^2} dt \quad \text{czyli } r, \varphi \text{ zależy od } \varphi \text{ przez } r, \varphi; \text{ ale nie pomaga!}$$

Wtedy podanie dwóch warunków: $r = \int \frac{1}{r^2} dr$ i $\omega = \int r^2 d\varphi$ nie wystarczy, bo nie są niezależne i powiązane. Należy podać $r = \varphi(t)$ i $\omega = \varphi(t)$ i wtedy można będzie wyznaczyć r i ω z $\varphi(t)$.

$$\frac{a}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \cos \theta + \text{const}$$

$$= -g \sin^2 \frac{\theta}{2} + \text{const}$$

~~$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = 2gh - 4g \sin^2 \frac{\theta}{2}$$~~

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = x$$

$$\frac{d\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = dx$$

~~$$\frac{a}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g \cos \theta + \text{const}$$~~

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -gx^2 + C$$

$$\sqrt{2a} \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(C-gx^2)}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2a}{C}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{g}{C}x^2)}} = \text{const}$$

falls $C > g$ $\frac{dx}{dt} > 0$ \nearrow

falls $C < g$ mit const.

$$\frac{g}{C} x = y$$

$$x = \frac{Cy}{g}$$

$$\sqrt{\frac{2a}{g}} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\frac{C^2}{g^2}y^2)}} = dt$$

$$y = \sin \varphi$$

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{2a}{\sqrt{C}} \frac{dy}{\sqrt{4-g \sin^2 \varphi}} = dt$$

falls $g < C$

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \varphi}}$$

falls $C < g$ $T = \frac{2a}{\sqrt{C}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \varphi}}$

$$\sqrt{\frac{g}{C}} \sin \varphi = \sin \theta$$

$$dy \sqrt{\frac{g}{C}} \sin \varphi = \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{g}{C}} dy = \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \theta}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \theta}}$$

falls $C < g$

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{C^2}{g^2} \sin^2 \varphi}}$$

$$E - U = L$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} \dot{r} + \frac{\partial E}{\partial \dot{r}} \ddot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\dot{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} \right) + \frac{\partial E}{\partial r}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{r}} \dot{r} \right) + \frac{\partial U}{\partial r} \dot{r} = \frac{d}{dt} (2E + U) = \frac{dE}{dt}$$

$$E + U = \text{const}$$

$L = f(r, \dot{r}, t)$ da nicht mit anderen Größen (wie Zeit t)

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \ddot{r}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \dot{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right)$$

$$\therefore L = \sum \dot{r}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} + \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial E}{\partial \dot{r}_i}$$

$$E - U = \sum \dot{r}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{r}_i} = 2E$$

$$E + U = \text{const}$$

Freie typische 1-stufige Methode zur Bestimmung der Gleichgewichte

beibehaltung von $\dot{r} = f(r, t)$

$$t = \int \frac{dr}{f(r)} + \text{const}$$

≠ Punktgleichung per kinematisch statisch



Zadajet holonomni am i ne holonomni am (Harta) Whitaker f.

Kada treba li po novotijoj klas. uzmi

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = \int a \delta \theta^2 + d\varphi \dots$$

ni catkovsky zovucki

iziti 2. zanku. vrad. to zovu catkovsky alay.

$$R dx + Q dy + R dz = 0$$

Wannet catkovskoi.

$$dz = -\left(\frac{P}{R} dx + \frac{Q}{R} dy\right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{R} \right) \quad (\text{Hart II f. ...})$$

Odobiti jak enyga punktu podijazicego nito ~~na krasu~~ daznyu yzinyu

$$\delta L = -(X \delta x + Y \delta y + W \delta z)$$

$$= -\left[f_1(x, y, z) \delta x + f_2(x, y, z) \delta y + f_3(x, y, z) \delta z \right]$$

Ala mi da' n' analizi' zaden zovucki formu $F(I, x, y, z) = 0$

Cy to prave? Zpurnonij mi intudiji $I + f(x, y, z) = 0$. ala cy mi istruji? ←

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (K_0 + a^2 M) \dot{\varphi}$$

$$(K_0 + a^2 M) \ddot{\varphi} = M g a \sin \varphi$$

$$(K_0 + a^2 M) \dot{\varphi}^2 = 2 M g a (1 - \cos \varphi)$$

$$2 M g a dt = \sqrt{\frac{K_0 + a^2 M}{1 - \cos \varphi}} d\varphi$$

$$M g a T = \sqrt{\frac{K_0 + a^2 M}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \log \tan \frac{\varphi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} = \int_{\cos \varphi_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\cos \varphi_0 - x)}}$$

$dx = \sin \varphi d\varphi$
 $= d\varphi \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2}$

tem większe rozwiązanie niż większy stosunek

Np. jeżeli $K_0 \gg M a^2$ ma ma rozwiązanie

$$K_0 \approx 0$$

$$T = \infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (K_0 + a^2 M \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = a^2 M \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$(K_0 + a^2 M \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 2 a^2 M \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \underline{a^2 M \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2} = M g a \sin \varphi$$

$$\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{d}{dt} (\sin \varphi \cdot \dot{\varphi})$$

$$K_0 \ddot{\varphi} + a^2 M \frac{d}{dt} (\sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) = M g a \sin \varphi$$

$$K_0 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + (\sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) (a^2 M \frac{d(\sin \varphi \cdot \dot{\varphi})}{dt} - M g a) = 0$$

$$K_0 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{a^2 M}{2} (\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + M g a \cos \varphi = \text{const.}$$

$$\dot{\varphi}^2 [K_0 + a^2 M \sin^2 \varphi] = 2 M g a (1 - \cos \varphi)$$

$$2 M g a dt = \sqrt{\frac{K_0 + a^2 M \sin^2 \varphi}{2 \cos \varphi}} d\varphi$$

wie przedt. analiz. tam, uzyskane w pierwszym war.

$$\frac{a^2 M}{K}$$

$$a^2 M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} = a^2 M \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2 a^2 M \sqrt{1-x} \Big|_1^0 = 2 a^2 M$$

$$T = \frac{a}{g}$$

to wyznaczone jest i sumowane wiel.

ale nie wyznaczone jest. w tej 2m. wiel.

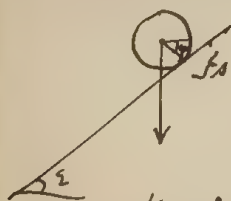
Inny przykład: walec tożsamy się po równi pochyłej.

całkowicie nieruchomy

1) strona

2) 2C jako drut - kłosa oś
położony pod kątem α
(zarys)

3) 1 walec nieruchomy drugiego punktu



$$T = \frac{1}{2} K \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} v^2$$

$$s = a \varphi$$

$$v = a \frac{d\varphi}{dt}$$

$$T = \frac{1}{2} (K + a^2 M) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = -Mg \sin \alpha \quad U = Mgy = -Mg a \sin \alpha \cdot \varphi + \text{const}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} (K + a^2 M) = Mg a \sin \alpha \quad \text{lub też wyprowadzić z jego zotrząśnięcia.}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{Mg \sin \alpha}{(M + \frac{K}{a^2})} = \frac{g \sin \alpha}{(1 + \frac{K}{Ma^2})} \quad \parallel \quad \text{Gdyby walec się ślizgał bez tarcia to byłoby } \frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \alpha$$

Ten przykład dobrze pokazuje postępowanie równań Lagrange'a. Wskazywać, że przygotowanych dla systemów punktów byłoby to nadmiernej rozwlekły rachunek. Można by chyba postąpić według zasad dla mechaniki statycznej.

Siły: składowa $Mg \sin \alpha$ i tarcie R , które wywołuje moment Ra

$$+ Mg \sin \alpha + R = + M \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$R = \frac{K}{a} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{K}{a} \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{1}{(K + Ma^2)}$$

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Ra \quad s = -a\varphi$$

$$a Mg \sin \alpha = (K + Ma^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad \text{właśnie to samo jak u góry.}$$

Inny przykład: Czoło na śliskiej podstawie

a) /

R

$$T = \frac{1}{2} K_R \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} (K_0 + a^2 M) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

na szorstkiej podstawie
wydłone z porządku równowagi niestabil.

X



$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} K_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \quad v_0 = a \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi$$

$$= \frac{1}{2} (K_0 + M \sin^2 \varphi) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Skąd widać, że dla dowolnego α istnieje α taki, że

$$\text{dla } \alpha > 0 \quad R > P \cos \alpha = \alpha M g \cos \alpha$$

czyli

$$\frac{M g \sin \alpha}{1 + \frac{M a^2}{K}} > \alpha M g \cos \alpha$$

$$\alpha > \alpha \left(1 + \frac{M a^2}{K}\right)$$

$$\text{dla } K = \frac{M a^2}{2}$$

$$\text{czyli: } \alpha \geq 3\alpha \quad \text{nie może być}$$

Widać, że dla dowolnego α istnieje α taki, że

czyli $\alpha = \alpha$; wtedy mamy:

$$R = \alpha M g \cos \alpha$$

$$M \frac{dv}{dt} = M g \sin \alpha - \alpha M g \cos \alpha$$

$$K \frac{d\alpha}{dt} = \alpha M g \cos \alpha$$

$$= g(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha}\right)$$

$$\text{czyli } \alpha = 3\alpha$$

$$\alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \text{czyli}$$

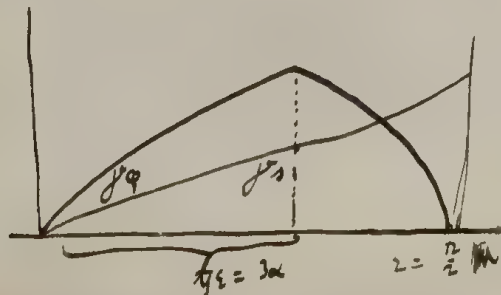
to samo, jak poprzednio, ale dla $\alpha = 3\alpha$

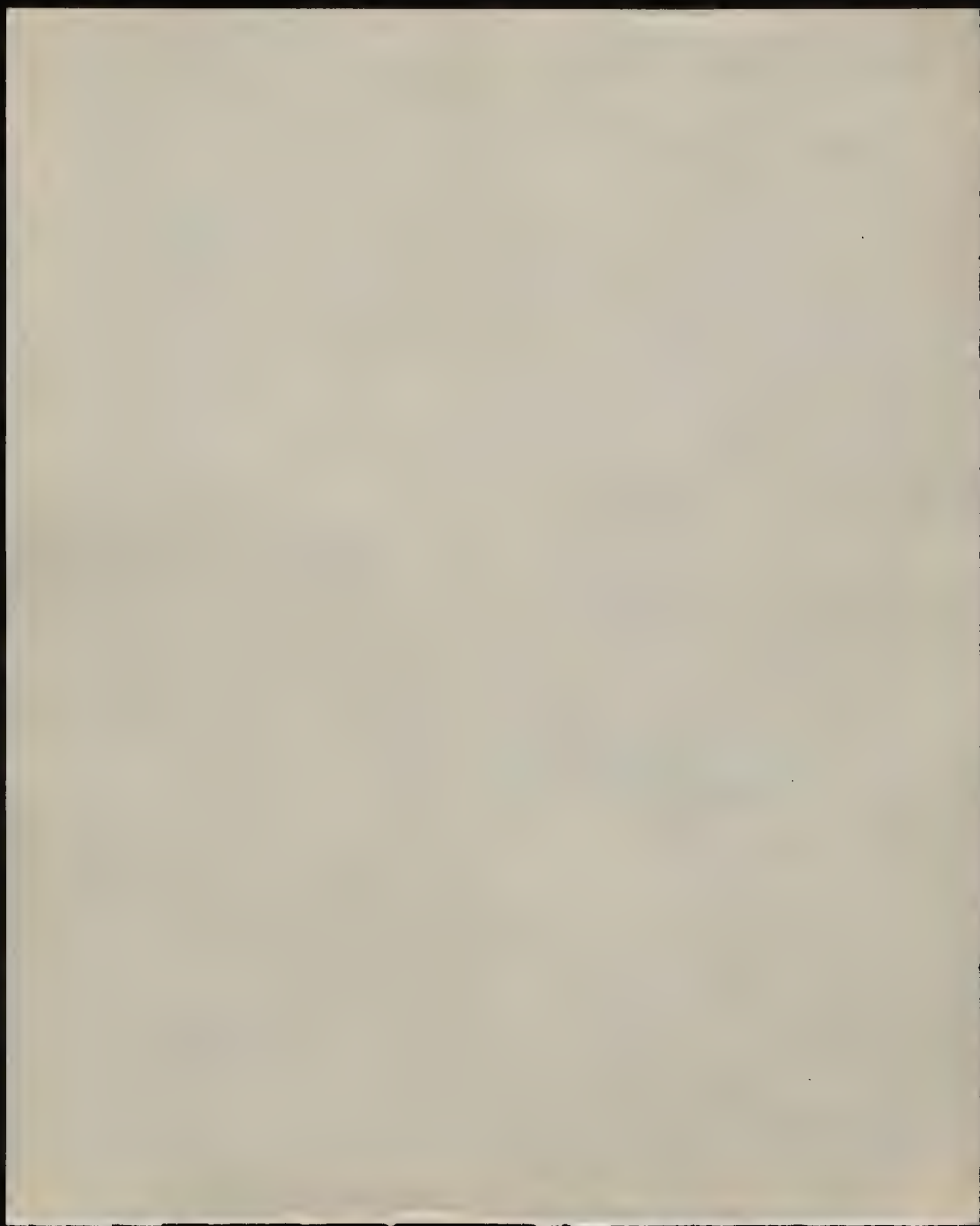
czyli $\alpha = \alpha$

$$\text{czyli } \alpha = \frac{M a^2}{K} g \sin \alpha = \frac{M a^2}{K} g \sin \alpha$$

$$\alpha = \frac{M a^2}{K} g \sin \alpha$$

$$\text{czyli } \alpha = \frac{M a^2}{K} g \sin \alpha$$





Inny przykład: Most unierdźcie ciętkoń ale nich maso hydroi rozdaiłone
 równo jednostojnie względem centru na osi X. Można to zastąpić działaniem
 siły $V = f \frac{dx}{ds}$, co wtowimny do nrych równań:

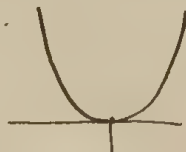
$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dy}{ds} \right) = f \frac{dx}{ds}$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = f x + b$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f}{c} x$$

$$y = \frac{f}{2c} x^2 + \text{const} \quad \text{Parabola}$$



N. p. most:



jeżeli uwzględniemy
 tylko ciężar dolnej części.

$$2 \int_0^L \frac{1}{2} \rho \frac{ds}{dt} = N \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{N^2}{R} = N$$

$$\frac{ds}{dt} \sim N$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \sim \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} N \frac{ds}{dt} = T \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{N^2}{R} = N \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{v^2}{R} =$$



Maamy ras: $R = \frac{ds}{dy}$

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds}$$

~~$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds}$~~

~~$y = \arctg \frac{dy}{dx}$~~

~~$\frac{dy}{ds} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{ds} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = \frac{dx^2}{ds^2} \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} =$~~

$$\frac{1}{R} = \frac{dx^2}{ds^2} \left[\frac{d^2y}{dx ds} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{dx^2} \right] = \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2} \frac{dy}{ds}$$

In otzynnym ras

$$\frac{\lambda}{R} = Y \frac{dx}{ds}$$

Tok proutyazani:

Z drugoy strany z ofelnykh vovnan:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\lambda}{ds} \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{d^2x}{ds^2} = X & \left| \frac{dx}{ds} \right. \\ \frac{d\lambda}{ds} \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{d^2y}{ds^2} = Y & \left| \frac{dy}{ds} \right. \\ \hline & = Z & \left| 1 \right. \end{array}$$

~~$\frac{d\lambda}{ds} + \lambda \left[\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right] = X dx + Y dy + Z ds$~~

~~$\lambda = \int (X dx + Y dy + Z ds) = U + \text{const}$~~

Wge tom: $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\frac{1}{R} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial y}}{U + \text{const}} \frac{dx}{ds}$$



jaki mung

N. p. jake chumy mof niri v kstatie kote

dratni sly:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{-y}{r} \frac{1}{U} \frac{dU}{dy}$$

$$- \frac{dy}{y} = \frac{dU}{U}$$

$$\ln \frac{1}{y} = \ln U + \text{const}$$

$$U = \frac{a}{y}$$

$$V = -\frac{a}{y^2}$$

Natrdnie nie do usczytati

bo v bliskini $y=0$: $V=\infty$, wpiet

taki z tyo wdoi sie tam pmona

Nie na którąś drogę nity ~~tytuł i treść~~ ^{anulowane wartości nity mikrozdglęsię}, więc $U = f(x, y, z)$

$$\delta U = 0$$

$$U = \int \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

To samo także w zasadzie

gdzie X, Y, Z są nity, pro chwytatki dójmii
wzrę:

$$\int \left(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \delta s \right) ds = 0 \quad \delta U = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

$$\int \left(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \right) ds + \lambda \delta s = 0 \quad \delta \int ds = 0$$

↑
Is trucha ddać b wamuk mikrozdglęsię wozg dnois sbs
u ten spóid (Zapozn mmoimiki)

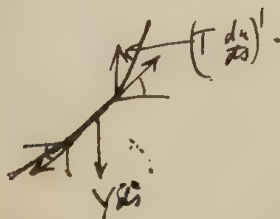
$$ds^2 = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2$$

$$\delta ds = \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) ds$$

$$\int \lambda \frac{dx}{ds} \delta x ds = \delta x \lambda \frac{dx}{ds} - \int \delta x \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$\int \left[X - \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x ds = 0 \quad \text{wzrę} : \quad \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) = X$$

Do tych samych równań można dojść i bezporędnio



$\lambda =$
z wzo' iagnmka i $\lambda =$ naprężenie nity

Jedni m. p. $X = 0$

$$\frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dy}{ds} \right) = Y = \frac{d\lambda}{ds} \frac{dy}{ds} + \lambda \frac{d^2 y}{ds^2} = Y$$

$$\frac{d\lambda}{ds} \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{d^2 x}{ds^2} = 0$$

Tohke na arhet yim. Zap. 2 masochy napredka:

$$\int (L - W) dt = \int \frac{\partial}{\partial t} (L - W) dt \delta p + \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial x} (L - W) dt \delta p}_{= \frac{\partial}{\partial p} (L - W) \delta p - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial p} (L - W) \delta p dt}$$

= 0

$$x = g \frac{t^2}{2} + \sum A_k \sin \frac{k t}{t_2}$$

$$v = g t + \sum k A_k \cos \frac{k t}{t_2}$$

$$\int \frac{v^2}{2} dt = \underbrace{g \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2} g t + \frac{1}{2} \sum k^2 A_k^2 \cos^2 \frac{k t}{t_2}}_{t \text{ as } - \int \dots} + 2 g A_k$$

g

$$U = -m g x$$

$$\int (m \frac{v^2}{2} + m g x) dt = m \frac{g t^3}{6} + 2 g A_k + \frac{1}{2} \sum A_k^2 \dots + g \frac{t^3}{6} \dots$$

Pom. Lagrange tohke vnutrid 2

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = 0$$

$$X = m \frac{dx}{dt} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dots = 0 \quad \left| \frac{\partial x}{\partial p} \right.$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p} + m_2 \ddot{x}_2 + \frac{\partial x_2}{\partial p} + \dots = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial p} + \dots \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial p} + \dots \right) + \dots$$

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial p} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial L}{\partial p}$$

$$x_i = f(t, \dots)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \dots$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p}$$

Naturálne také kontakt drži dieťa a tu som posol $x = \frac{g t_3^2}{4}$

N.p. $x = \frac{g t^2}{2}$ $y = \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{g t^2 \pi}{2 x}$ $L = \pi \frac{g t_3}{4}$ $U = \frac{g t_3^2}{4} (1 - \cos \frac{t}{t_3})$

$\ddot{x} = g t$ $\ddot{y} = \frac{\pi g t}{x} \cos \frac{\pi t^2}{2 x}$ $\frac{2 g t_3^3}{4} - \frac{g t_3^3}{4}$

$\int \left[\frac{g t^2}{2} + \frac{x^2 g t^4}{2 x_1} \cos \frac{\pi t^2}{2 x_1} \right] dt = \dots$ To sú same presne sú rovnice

Wright $\int \frac{g t^2}{2} dt$

Naturálne je iz tej zásady, môžeme znova znova vykonať rovnice miera
(Ale také tu je treba môžeme ich byť týchto nizolehne vznikneme)

N.p. príklad rovnice:

$\delta \left[\int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \frac{m}{2} - U \right] dt = 0$

$= \int (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{y} \delta \dot{y} + \dot{z} \delta \dot{z}) m - \delta U \Big|_{t_1}^{t_2} = \int (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) m - \delta U \Big|_{t_1}^{t_2} = \int (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) m - \delta U \Big|_{t_1}^{t_2}$

$m \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}$

Wozie rovnováhy máme: $\delta U = 0$

Wiz. alebo Minin (stale rovnováhy)

Max (místala ")

Minimax (stale-místala ")

alebo wozie nienam indiff (obojstr)

Wiz. A jeh n.p. $\square \delta U > 0$

Wah-dh trikon

$$C = g \omega + \frac{1}{2} \frac{c}{a^2 \omega^2}$$

Przykład 1 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Już p_1 mi udało się L a δp oznacza przesunięcie δx
 $\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0$ a nie

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \text{const}$$

$$p_1 = x_1$$

$$T = \sum_k \frac{m}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \sum m_k \left[\dot{x}_k \left(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_1} \right) + \dot{y}_k \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{x}_1} + \dots \right]$$

$$\text{złazim } \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial x_k}{\partial x_1} \text{ etc.}$$

$$= \sum m_k \left[\dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial x_1} + \dot{y}_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} + \dots \right]$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_1} = 0 \quad \dots$$

$$= \sum m_k \dot{x}_k$$

czyżż moment pędu...

Przykład 2 $p_1 = p_2$

$$x_k = r_k \cos \varphi_k$$

$$y_k = r_k \sin \varphi_k$$

$$\omega = 2$$

$$dr_k = d\rho_k$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_1} = \frac{\partial x_k}{\partial \varphi} = -r_k \sin \varphi_k = -y_k$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial p_1} = \frac{\partial y_k}{\partial \varphi} = r_k \cos \varphi_k = x_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \text{const} = \sum m_k [-\dot{x}_k y_k + \dot{y}_k x_k]$$

Już system może być obrotowy i stać się rotacją o ω wokół osi z (punktów)

Zwarty bębek ma 5 (stopni) wtedy wolno i jeśli masa się po planie
 Jeśli ma przy końcu osi wydłużenie, można go ^{wadzić} ~~zatrzymać~~ na sznurku i wtedy
 chodzić wzdłuż sznurka - wtedy ma 4 stopnie
 Wreszcie jeśli koniec osi w stałym stanie to ma 3 wolności.

Oparujemy się na bliższe zbadanie tego przypadku, ~~isto~~ ponieważ najłatwiej

Wówczas mielibyśmy teraz wyznaczyć p, q, r

z pomocą kątów φ i ϑ i wrócić to do równań
 Eulera.

Albo tutaj wygodniej raczej wyjść z zasady zachowania
 energii i pędu (jak już było w poprzednich przypadkach).

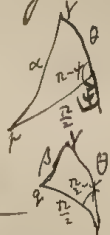
$A = B$, ale A, B rachujemy ^{do} ~~przez~~ osie przechodzące przez O (równoległe
 do p, q), C ; $Mg \sin \theta$ $Mg \cos \theta$

$$A \frac{d\varphi}{dt} + p^2 (C - A) = R$$

$$A \frac{d\vartheta}{dt} + p^2 (A - C) = Q$$

$$C \frac{dr}{dt} = R$$

Całkowity wiria moment p i Q ale $R = 0$



$$p = \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \theta \cos \varphi$$

$$q = + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \theta \sin \varphi$$

$$r = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta$$

$$\text{zatem } r = \text{stałe!} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{stałe!}$$

Łącząc do tych innych równań wprowadzimy one dwie zasady:

$$E = \text{Praca wiria} = \frac{1}{2} C - M g l \cos \vartheta$$

$$E = A p^2 + A (p^2 + q^2) + C r^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta$$

bo mamy całkowity drut $= p^2 + q^2 + r^2 =$

$$= r^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2$$

38 Zatem $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}$ stało:

$$\frac{A}{2} \left[\left(\frac{d\dot{\varphi}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right] = C - Mgl \cos \vartheta \quad \parallel \text{A jeżeli wyznaczymy ze w}$$

ponażej $\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = 0 = \frac{d\varphi}{dt} = 0$

$$\left[\frac{A}{2} \left[\left(\frac{d\dot{\varphi}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right] = 2Mgl (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \right]$$

Zachowanie góla:

$$A \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta = -A Mgl \cos \vartheta$$

Którą oni nie chciały iaden moment stać, zatem moment obrotowy który ma jest stały. Stada on się 2

$$C \cos \vartheta + A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \vartheta$$

$= A \varphi \cos \alpha + A \varphi \cos \beta$

= stało

bo: wtedy, kiedy α wystawny, to nie ma ruchu; wtedy β mała jest, to kierunek przeciwny φ $\varphi=0$, zatem wydawało się tylko moment $A \varphi = A \frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta$, a z tego tylko było formuła jest \perp

$A \varphi$

φ_0 :

$$\left[C \cos (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) = A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \vartheta \right]$$

Wtedy

Ten opisanie: φ_0 małe $= \alpha$

$$\frac{d\varphi}{dt} = + \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\text{Wtedy: } \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta = -2 \sin \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{2} = \alpha \sin \vartheta_0$$

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta_0$$

Zatem:

$$+ C \cos \alpha = A \frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta_0$$

$$A \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta_0 \right] = 2Mgl \alpha \sin \vartheta_0$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \frac{2Mgl \alpha \sin \vartheta_0}{A} - \left(\frac{C \cos \alpha}{A} \right)^2$$

Którą dla stróć:

$$\frac{C \cos \alpha}{A} = \lambda \parallel \beta = \frac{Mgl A \sin \vartheta_0}{C^2 \sin^2 \vartheta_0}$$

$$\frac{Mgl}{A} \sin \vartheta_0 = \lambda^2 \mu \beta$$

Wtedy $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$
 $\frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta_0 = \frac{d\alpha}{dt} \sin \vartheta_0$
 $\frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta_0 = \frac{2Mgl \sin \vartheta_0}{A}$

2. zmiana całkowita L zmierzona v kierunku...

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = L$$

A w tym przypadku...

$$\delta L = \delta U - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \dots$$

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q$$

A co to jest to mierzona, akcja? będzie granicą...

$$\int_{t_1}^{t_2} (L - U) dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q$$

Jedną z rzeczy, którą możemy zrobić, to zabrać δq i wyznaczyć δq

to $\delta(L - U)$

Wystarczy zobaczyć, że jest to całka z δq i $\delta \dot{q}$, które są zmiennymi...
 i w tym przypadku...
 systemy w pewnym stanie. Z tego wynika, że...
 to jest, że gdybyśmy mieli...
 Jedną z rzeczy, którą możemy zrobić, to zabrać δq i wyznaczyć δq

Průmyslový

~~Hledáme~~ ~~středisko~~ Punkt overledning

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

~~U = mgy~~

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

$$m \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_{\text{tang}}$$

Wahedlo ~~středisko~~; ~~ten~~ oparvedzie $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

ale tyto výrazní můžeme uvažovat v ten samý způsob, bo x i y můžeme
mířičně. $x^2 + y^2 = a^2$

Jakli dle sis uvažuje m. j. \ddot{x} jako mířičně

$$x \ddot{x} + y \ddot{y} = 0 \quad L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \left[1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right] = \frac{m \dot{x}^2 a^2}{a^2 - x^2} \quad U = mgy$$

$$\frac{dL}{dx} = m \dot{x} \left[1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right] \parallel \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \left[\frac{2x}{y^2} \right] = \frac{m \dot{x}^2}{2} \left[1 + \frac{2x}{a^2 - x^2} \right]$$

$$= m \dot{x} \left[1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \frac{2x}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= m \dot{x} \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

$$\text{In tiaz: } \frac{dU}{dx} = mg \frac{dy}{dx}$$

$$m \ddot{x} \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{2m \dot{x}^2 a^2 x}{(a^2 - x^2)^2} - \frac{m x \dot{x}^2 a^2}{(a^2 - x^2)^2} = m \ddot{x} \frac{a}{a^2 - x^2} + \frac{m a^2 x \dot{x}^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$= m a \frac{d}{dx} \frac{\dot{x}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = m g \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ etc.}$$

$$\frac{m x \dot{x}^2}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2)^2}$$

Naturdnie je viele stěrovníj spůsobů jak davyj optický signál.

$$L = \frac{m}{2} a^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = \mp m g a \cos \varphi$$

$$m a^2 \ddot{\varphi} = m g a \sin \varphi$$

$$x = a \cos \varphi$$

$$\dot{x} = -a \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}^2 = a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$-\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \dots$$

Wzrostko stojące



$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad U = mgr \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m r^2 \sin \theta \cos \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$m \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{m}{r} a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2 mgr \sin \theta \quad I$$

$$m a^2 \left[\sin^2 \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right] = 0 \quad II$$

~~Przez całkowanie i t.d.~~ $\sin \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\varphi}{dt} = A \sin^2 \theta + \text{const}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d(\sin^2 \theta)}{dt} = 0$$

T.j. zasada pól: $a^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = c$

A wstawiamy to w pierwsze równanie otrzymamy resztkę energii
przez całkowanie i t.d.

mianowicie: $\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a^2 \sin^2 \theta}$

wzrostko:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{c^2 \cos \theta}{a^4 \sin^3 \theta} = \frac{1}{2} g \sin \theta$$

przez całkowanie

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{2a^4 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} g \cos \theta + \text{const} = 0$$

n.p. u przybliżeniu $\frac{d\theta}{dt} \approx 0$
 $a \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g$
 $a \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g \tan \theta$
 $\frac{c}{a^2} = \tan \theta$

z tego i ze zasady pól
otrzymamy
równanie energii

Z czego: $dt = \frac{d\theta}{f(\theta)}$

równanie czasu

a z prawego: $d\varphi = \frac{c d\theta}{a^2 \sin^2 \theta f(\theta)}$

równanie toru

N.p. stojące jędrze $\frac{d\theta}{dt} = 0$ więc $a \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a \sin^2 \theta} = \frac{1}{a \sin^2 \theta}$

to całkujemy: $a \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta = \frac{1}{2} g \cos \theta$

całki elipsy
 $\frac{1}{2} g \cos \theta = \frac{1}{2} g \frac{a \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta}$
 $\frac{1}{2} g \cos \theta = \frac{1}{2} g \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}$
 $\frac{1}{2} g \cos \theta = \frac{1}{2} g \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}$
 $\frac{1}{2} g \cos \theta = \frac{1}{2} g \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}$

1). Dⁱ ^{di dalam} Pada bagian Karya penerjemahan puncak antara yang dalam Tanah situasi ekonomis.
Jalan-jalan ini, Jalan ini baru saja --

[illegible]

3) Tok samo p. Andrei Lk i tatium (mali yzhen)

$$\propto m \frac{d^2 p}{dt^2} = -mg\varphi + \alpha (mg + a \frac{dp}{dt})^2$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{g}{2}\psi + \alpha$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right) + \frac{g}{g} \alpha \quad \text{notereln in tyke degen} \quad \varphi > \alpha$$

4) White & green of rock

Take again the following amplitudes: $1: \frac{1}{2}: \frac{1}{4}: \frac{1}{8} \dots$

fourth row abundant; 1st and 2nd rows

5). То жадней кувши, а чертёв, а помытыя и помытыя, ~~а помытыя~~ помытыя в X-е

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ of size}$$

$$V^2 = g f(y_0 - y)$$

~~$$V = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$~~

$$T = m g \cos \theta + \frac{m v^2}{r}$$

~~$T=0 \text{ gdy } \frac{1}{R} = -\cos \varphi = \frac{g}{v^2}$~~

~~$$\frac{1}{R} = \frac{-\cos \theta}{2(y_0 - y)}$$~~

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad \text{at } (0,0)$$

$$y = \sqrt{\dots}$$

das drängt sich auf:

0). Wsk. d.h.: Wie gut nähert sich die Funktion φ



$$T = mg \cos \varphi + m a \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

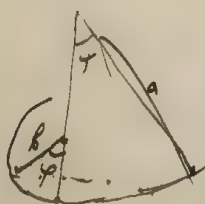
~~us. d.h. d.h. $\varphi = \varphi_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$~~

$$\frac{m}{2} \left[\ddot{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \right] = mg \dot{\varphi} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

~~$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \frac{1}{2} \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$~~

$$T = mg \cos \varphi + 2mg (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = mg (2 \cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

~~$\cos \varphi_0 - \cos \varphi > 0$~~

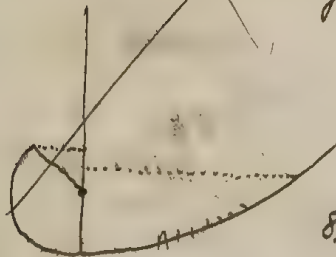


$$T = mg \cos \varphi + m b \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{m}{2} b^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = mg a (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

$$T = mg \left[\cos \varphi + \frac{2a}{b} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \right] = mg \left[\cos \varphi + \frac{2}{b} \Delta \varphi \right]$$

$= 0$ für $\cos \varphi = -\frac{2 \Delta \varphi}{b}$



1). Wie gut nähert sich die Funktion φ



2). Wie gut nähert sich die Funktion φ



3). Wie gut nähert sich die Funktion φ

4). Wie gut nähert sich die Funktion φ

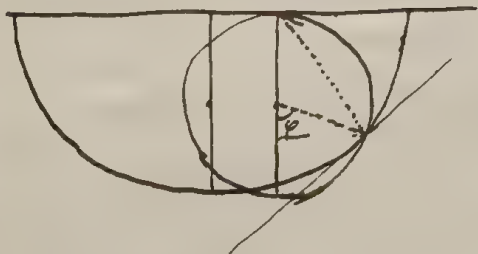
5). Wie gut nähert sich die Funktion φ

6). Wie gut nähert sich die Funktion φ

7). Wie gut nähert sich die Funktion φ

1. Wskadla 2 gram

2. Wskaad cykloskora



$$x = a(\varphi + \sin \varphi)$$

$$y = a(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a d\varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2a \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$dx = \frac{a d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$ds = \frac{a d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$ds = \frac{a d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$= a d\varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

$$s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}$$

albo tid 2 ramady zaskow. masy:

$$v = 2a \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{m}{2} \left(2a \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = g m a (1 - \cos \varphi) = \omega^2 a^2 - g m a (1 - \cos \varphi_0)$$

$$2a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 2g a (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2})$$

$$a \frac{d(\sin \frac{\varphi}{2})}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}} = \frac{dt}{2}$$

3) Ruch po równi pochyłej

4) " " z tarcia i siłą stałą

2nd

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} - y^2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^2}{x^2} dt + \frac{y}{x} \frac{dy}{dt} dt$$

$$\frac{y}{x} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} y^2 = \frac{y^2}{x^2} dt + \frac{y}{x} \frac{dy}{dt} dt$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y^2 = \text{const}$$

$$\frac{y^2}{x} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y^2 \right) y^2$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + U = c$$

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{c - U}}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{c - 2gry}} = \frac{\sqrt{2g} dr}{\sqrt{c - 2gry}} - \frac{gry}{\sqrt{c - 2gry}}$$

1) Taka kugla iz vis tih sam jedn po slicnoj



$$t = \frac{\sqrt{2r}}{g \sin \varphi} = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{c - 2gry}}$$

Snell 1736

Am 24



$$\begin{cases} y = a(1 + \cos \varphi) \\ x = a(\varphi - \sin \varphi) \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 [\sin^2 \varphi + (1 - \cos \varphi)^2] d\varphi^2$$

$$ds = d\varphi \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = d\varphi \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$s = 2a(1 - \cos \frac{\varphi}{2}) = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \left(1 - \frac{s}{2a}\right)^2$$

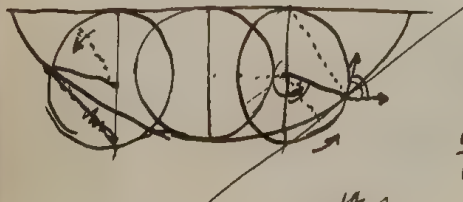
$$\frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + 2ga(1 - \cos \varphi) = \text{const}$$

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + 2ga \left(1 - \frac{s}{2a}\right) = c$$

jezeli lijevno

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{ds}{dt} = \sqrt{2ga} \dots$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{-2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2a - y} = \frac{\sqrt{y(2a - y)}}{2a - y} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2a - y}$$

$$v = \sqrt{2g \cdot h} = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \frac{dy}{dt} \sqrt{\dots}$$

$$dt = dy \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$$

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + u = \frac{a}{c} u^{n-2}$$

$$\Phi = \frac{b}{u^2}$$

$$u^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} = c$$

$$a = \frac{b}{c^2}$$

$$u = c(1+x)$$

$$\frac{d^2 x}{d\rho^2} + x \frac{1}{c} = a c^{n-3} (1+x)^{n-2} = a c^{n-3} (1+(n-2)x)$$

~~$$1 + (2-n) a c^{n-3} x$$~~

$$1 = a c^{n-3}$$

$$\frac{d^2 x}{d\rho^2} + x(3-n) = 0$$

$$x = A e^{-\alpha \rho}$$

$$3-n < 0$$

$$x = A \sin \alpha \rho$$

$$3-n > 0$$

$$\alpha = \sqrt{3-n}$$

$$n = \frac{1}{c(1+x)}$$

$$\Phi \sqrt{3-n} = \pi$$

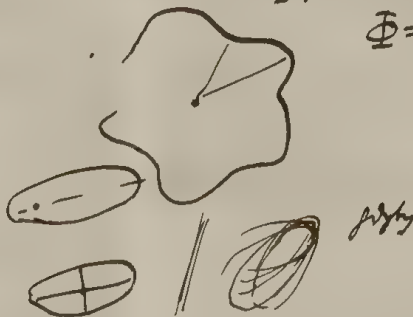
$$\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}} \quad (\text{Newton!})$$

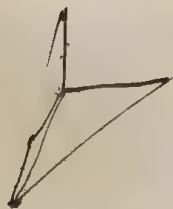
$$\text{N.p. } n=2$$

$$\Phi = \pi$$

$$n=-1$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}$$





~~101~~
i +

Through 2 part

$$b_1 i + b_2 j + b_3 k = (a_1 + 1)i + (a_2 + 1)j + (a_3 + 1)k$$

$$(a_1 + 1)i + a_2 j + a_3 k = u$$

$$a_1 i + (a_2 + 1)j + a_3 k = v$$

$$a_1 i + a_2 j + (a_3 + 1)k = c$$

$$i = u - v$$

$$j = v - c$$

$$k = c - i = [ij]$$

$$[(u-v)(v-c)] = c-v$$

$$c-v = (c-u)(b-v) = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

$$[u b] - [v b] - [u v] + [v c] = c-v$$

$$[u b] + [(b-u)v] = c-v$$

$$c - [u b] = [(b-u)v] + v$$

$$\int (b-u)(c-[u b]) = \int v(b-u)$$

$$c_1 - d_1 = a_2 b_1 - a_3 b_2 + d_2 [a_3 - b_3] + d_3 [b_2 - a_2]$$

$$d_1 + d_2 (a_3 - b_3) + d_3 (b_2 - a_2) = c_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3$$

$$d_2 + d_3 (a_1 - b_1) + d_1 (b_3 - a_3) = c_2 + a_1 b_3 - a_3 b_1$$

$$d_3 + d_1 (a_2 - b_2) + d_2 (b_1 - a_1) = c_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} (c_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3) & (a_3 - b_3) & (b_2 - a_2) \\ (c_2 + a_1 b_3 - a_3 b_1) & (a_1 - b_1) & (b_3 - a_3) \\ (c_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2) & (a_2 - b_2) & (b_1 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_3 - b_3 & b_2 - a_2 \\ 1 & a_1 - b_1 & b_3 - a_3 \\ 1 & a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2}$$

6. The

Re

Kula 10g 1kg

... .. 10 1200 1200

Kula ...

ds =



1kg
... .. 10m
... .. 10m



2. 1/1000



... ..



$$A \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$A \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(K_1 \frac{dx}{dt}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(K_2 \frac{dy}{dt}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(K_3 \frac{dz}{dt}) = R$$

$$C \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) = R \tau$$

power is very small, when
by the C is small

$$\frac{dy}{dt} = \frac{R \tau}{C}$$

if we want to find the power:

$$P = \frac{\frac{R \tau}{C}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R \tau}{C}\right)^2}}$$

if we want

$$P = \frac{\frac{R \tau}{C}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R \tau}{C}\right)^2}} = \frac{R \tau}{\sqrt{C \omega^2 + R^2 \tau^2}}$$

$$\frac{d}{dt} (K_1 \frac{dx}{dt}) = P$$

$$\frac{d}{dt} (K_2 \frac{dy}{dt}) = Q$$

$$\frac{d}{dt} (K_3 \frac{dz}{dt}) = R$$

$$\frac{d}{dt} L = M$$

$$\frac{d}{dt} \sum m [r \frac{dr}{dt}] = \sum [r \dot{\theta}]$$

$$L = \sum m [r v]$$

$$= \sum m [r \frac{dr}{dt}]$$

$$= \sum m r^2 \dot{\theta} = \sum m r^2 \omega$$

Juisti $M=0$ $L = \text{const}$

ali 2 tipa mi vgritka, ja $\frac{dx}{dt} = \text{const}$

$\frac{dy}{dt} = \text{const}$

$\frac{dz}{dt} = \text{const}$

ko vrtimo v kateri smeri teko

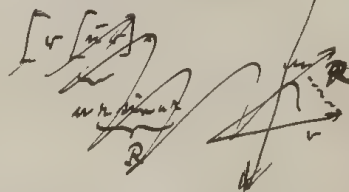
$K_1 K_2 K_3$ ni zasukaj

Tajko juisti o' vrteti vgritkega teko je $K_1 K_2 K_3$ ni zasukaj vrteti

a zrtati juisti vgritkega o' vrteti v kateri smeri je zrtati o' je zrtati

Impuls

$$L = \int m dt \quad \text{Linijski}$$



$$\text{Potencialna} \quad \sum m \frac{v^2}{2} = \sum m r^2 \omega^2$$

$$\begin{aligned} \mu ([r \frac{dr}{dt}]) &= ([\dot{r} r]) [\dot{r} r]) \\ &= [\dot{r} r]^2 \\ &= \mu^2 r^2 \end{aligned}$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

$$\sum m [r \frac{d^2 r}{dt^2}] = \sum [r \ddot{\theta}]$$

I. Bewegung A - A' ; Zeitintervall $0 \rightarrow \Delta t$
 $c \rightarrow c'$

II. Zeitinterv. mehr

$$dt = dt_0 + [dt, v]$$

III. $[dt_1, v] + [dt_2, v] = [(dt_1 + dt_2), v]$

IV. $dt_1 = i \frac{dx_1}{c} + j \frac{dx_2}{c} + k \frac{dx_3}{c}$

$$[dt_1, v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$dv = \underbrace{(\delta x + 2x \frac{d\beta}{d\alpha} - y_2 \frac{d\gamma}{d\alpha})}_{\delta x} i + \left(\frac{1}{\delta y_1} + \frac{1}{\delta y_2} \right) j$$

Integration:

$$\sum (\gamma dv) = 0$$

$$\sum (\gamma dv_0) + \underbrace{\sum (\gamma [dt, v])}_{=0} = 0$$

$$\underbrace{(\sum \gamma_0 dv_0)}_{=0} + \underbrace{\sum dt [v \gamma]}_{(dt \sum [v \gamma]) = 0} = 0$$

$$= 0$$

$$\sum (\gamma - m \frac{d^2 r}{dt^2}) dt = 0$$

$$\sum (\gamma_0 - m_n \frac{d^2 r_n}{dt^2}) = 0$$

$$\sum \dots$$

$$\sum [v \gamma] = \frac{d}{dt} \sum m [v \frac{dr}{dt}]$$

geschwindigkeit nach $v = v_0 + [u, v]$ ist
 vektor $v = v_1 + v_2$
 $v = v_0 + [u, v_1] + [u, v_2]$
 wenn $[u, v_1] = 0$ dann ist $v_1 \parallel u$
 $[u, (v_0 + [u, v_2])] = 0$
 $[u, v_0] = 0$
 $[u, v_0] = 0$

$$\sum \gamma = \sum m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sum m$$

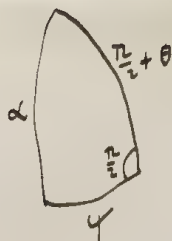
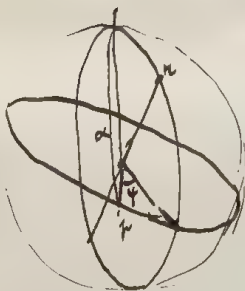
$$\sum [v \gamma] = \sum [v \frac{d^2 r}{dt^2}]$$

$$\sum [v_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}] = \sum [v_0 \frac{d^2 r_0}{dt^2}] + \sum [v_0 \frac{d^2 r_0}{dt^2}] + \sum [v_k \frac{d^2 r_k}{dt^2}]$$

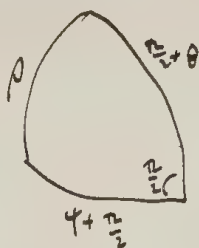
$$v_k = v_0 + v_n$$

$$\mathcal{E} + \mathcal{G} = 0.$$

$$m + [\mathcal{G}_r] = 0 \quad \text{by the rule} \quad (\mathcal{G}_m) = -(\mathcal{G}[\mathcal{G}_r]) = 0$$



$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \phi$$

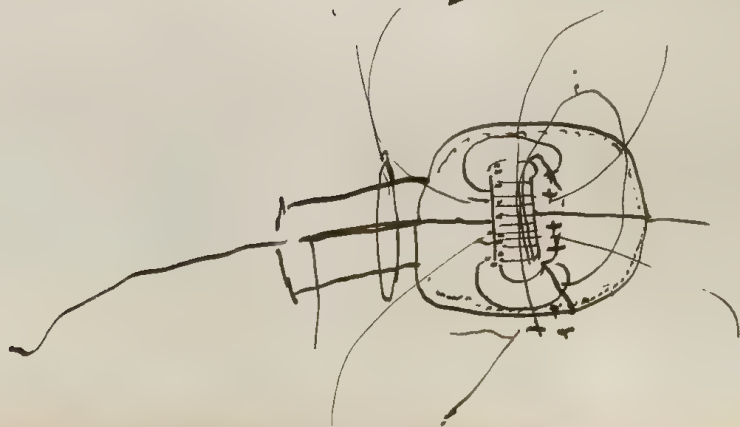
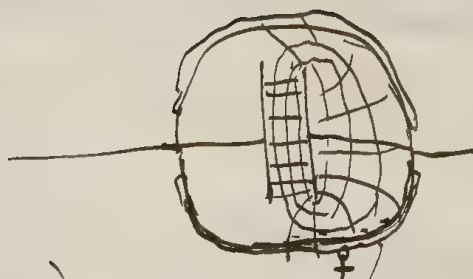


$$\cos \alpha = \cos \theta \sin \phi$$

$$A + \frac{dA}{dt} \cos \theta \sin \phi \neq M \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \phi \right)$$

$$C \frac{d\alpha}{dt} + A \left(\frac{d\theta}{dt} \cos \theta - \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \right) + \left(\frac{A}{\sin \theta} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \phi \right) = 0$$

~~$\frac{d\alpha}{dt} \cos \theta \sin \phi$~~



$$x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$z_1 = z$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi - x \omega \sin \varphi - y \omega \cos \varphi$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + x \omega \cos \varphi - y \omega \sin \varphi$$

$$T = m \left[\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2}{2} + (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) \omega \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m (\dot{x} \cos \varphi + \omega y)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m (\dot{y} \cos \varphi - \omega x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = m (\dot{x} \sin \varphi + \omega \cos \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{X}{m} + \omega^2 x + \dot{\omega} y + 2\omega \dot{y}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Y}{m} + \omega^2 y - \dot{\omega} x - 2\omega \dot{x}$$

$$m_z = \dots$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 2\omega (\dot{y} \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -2\omega \dot{x} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -g - 2\omega \dot{y} \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -a^2 \xi + 2b \frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -a^2 \eta - 2b \frac{d\xi}{dt}$$

$$\xi = A \cos(n_1 t + \theta) + C \cos(n_2 t + \phi)$$

$$\eta = \dots$$

$$n_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - b$$

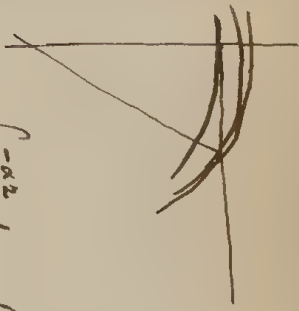
$$n_2 = \sqrt{a^2 + b^2} + b$$

$$\xi = A [\cos(a-b)t + \sin(a+b)t] = 2A \cos bt \sin at \neq a-b$$

$$\neq a+b$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -2\omega \dot{y} \sin \varphi \\ \xi &= \frac{g}{\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t \\ \eta &= \frac{g}{\omega^2} [\cos(\omega t) - 1] + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t \\ \zeta &= \frac{g}{\omega^2} (1 + \cos \omega t) + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

18. 0. 0.566



$$\frac{dx}{dt} = \sin \varphi = \frac{1}{a+2}$$

$$2 = 4^2$$

$$dx = 2y dy$$

$$dx \mp \frac{dy}{x}$$

$$\int x^{-a/2} dx = \frac{1}{x}$$

$$a^2(a+2)^2 - a^2 = 2a^2 + 2^2$$

$$a = \sqrt{2a^2}$$

$$\int x^{-a/2} dx = a \int \frac{x^{-a/2} dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^{-a/2} dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^{-a/2} dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^{-a/2} dx}{x}$$

$$\sqrt{636.00} = 250 \text{ km.}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt} + \lambda x \quad \frac{1}{2} = 10 \text{ km.}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega \left(\sin \varphi \frac{dx}{dt} + \cos \varphi \frac{dz}{dt} \right) + \lambda y$$

$$\frac{dz}{dt} = g - 2\omega \cos \varphi \frac{dy}{dt} + \lambda(z+e)$$

$$\frac{t_e}{t_e} = \frac{(11-7)e}{(11-7)e} = \frac{t_e}{t_e}$$

$$b = \frac{t_e}{t_e}$$

$$\frac{t_e}{t_e} = \frac{t_e}{t_e}$$

$$b = \frac{t_e}{t_e}$$

$$b = \frac{t_e}{t_e}$$

$$H = W - 2U$$

$$b = \frac{t_e}{t_e} = \frac{t_e}{t_e}$$

$$\frac{t_e}{t_e} = \frac{t_e}{t_e} = \frac{t_e}{t_e}$$

$$dy = \frac{k dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} U(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}$$

$$k = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = -\frac{2}{m} U(r) + h^2$$

$$U(r) = -\frac{c}{r^2}$$

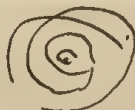
$$dy = \frac{k dr}{r^2 \sqrt{h - \frac{1}{r^2} (k^2 + \frac{2c}{m})}} = \frac{-k dr}{\sqrt{h - (k^2 + \frac{2c}{m}) \frac{1}{r^2}}} = -k \arccos \frac{\sqrt{h}}{r}$$



$$r = \frac{r_0}{\cos \phi}$$



$$\text{for } h^2 = \frac{2c}{m} : \quad \phi = \frac{k}{h} \frac{1}{r}$$



$$\frac{1}{2} (r + \sqrt{r^2 + k^2}) = r$$

$$r = \frac{2r_0}{e^{k^2 \phi + \frac{1}{2} - k^2 \phi}}$$

$$h=0$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = h^2 - \frac{k^2}{r^2} - \frac{2}{m} U(r)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = + \frac{k^2}{r^3} + \frac{2}{m} F(r)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = k^2$$

$$F = -\mu u^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2} u^{n-2} - u$$

$$u = c(1+r)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + u = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{2-3}{2} \left[1 + (n-1)u + \frac{(n-1)(n-2)}{2} u^2 \right]$$

$$= \frac{\mu}{r^2} c^2$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + u = (n-1)u + \frac{(n-1)(n-2)}{2} u^2$$

$$x = \frac{r}{r_0}$$

$$x = \frac{r}{r_0} \cos \phi \quad (1-\epsilon) \cos \phi + (1+\epsilon) \cos \phi = 2 \cos \phi$$

$$r = 3 - u$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$dx = \frac{dt}{dt + \beta t}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2$$

$$x = \frac{1}{\beta} \ln(\alpha + \beta t)$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\beta$$

$$\frac{1}{v} = \beta t + \alpha = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \beta v^2$$

$$\frac{dv}{g - \beta v^2} = dt \quad \int \frac{g + v\sqrt{\beta}}{g - v\sqrt{\beta}} = t + \alpha \quad v.$$

$$y = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + \frac{g}{2}$$

$$x = c \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \dot{y} = c \sin \alpha + g \\ \dot{x} = c \cos \alpha \end{cases}$$

$$V^2 = c^2 + g y$$

$$V = \sqrt{c^2 + g y}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-g \frac{dy}{dt}}{\sqrt{c^2 + g y}}$$



$$r = \frac{a}{1 + e \cos \varphi}$$

 a^2

$$x = a e + \frac{\frac{b^2}{a} \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a e + (a e^2 + \frac{b^2}{a}) \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a(e + \cos \varphi)}{1 + e \cos \varphi}$$

$$y = \frac{\frac{b^2}{a} \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}$$

$$\left(\frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{1 + e \cos \varphi} = (1 + e \cos \varphi)^{-2}$$

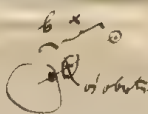
\parallel
 $(1 - e^2)$

$$e^2 + 2e \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi - \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{1 + e \cos \varphi} = 1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi$$

Rotacja

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K}{gMa}}$$

$$K = K_0 + k_0 + x^2 m$$



$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + k_0 + x^2 m}{Mg - mx} \frac{M}{Mg}}$$

$$a = \frac{Mg - mx}{M + m}$$



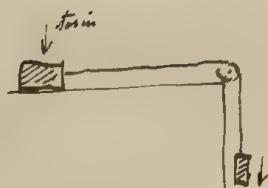
$$K \frac{dy}{dt} = a F$$

$$K \frac{dy}{dt} + \dots = 0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - F$$



2 metody energia kinety.



W układzie systemat. energii układu dla układu 1 stopni swobody: energia potencjalna
dla 2 stopni swobody: energia kinetyczna
energia całkowita = potencjalna + kinetyczna

Optymalizacja d. minimalizacji



$$K R^2 + m r^2 \omega^2 = \text{const}$$

$$m r^2 \omega^2 = \frac{c}{r^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{r^3}}$$

$$K R^2 + m \frac{c}{r^2} = \text{const}$$

$$(R - \omega) = \omega - \frac{c}{R^2} - \frac{c}{R^3} = 0$$

$$\alpha p + \frac{p}{p^3} = c$$

1) Właściwość balistyczna $Kp + mlv = mlv_0$

$$\varphi = \frac{1}{2} \pi \sin \frac{v}{c}$$

110



$$Kp = Fl = m \dot{x} l$$

$$Kp = m l (v_0 - v)$$

$$= l p$$

$$p = \frac{m l v_0}{K + m l^2}$$

Fluktuacja:

$$Kp + m l v = \text{const} = m l v_0$$

$$a \frac{m l}{K}$$

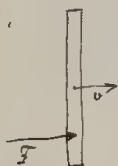
$$v_0 = v + \frac{m a K}{m l}$$

2) Pół przysięgany, wzmocny



musi wypaść, jaki ruch?

3).



Siła chwytowa + ("Kierka")

$$M \frac{dv}{dt} = F$$

$$M v = \int F dt$$

$$\frac{d}{dt} (Kp) = a F$$

$$Kp = a \int F dt$$

$$a M v = Kp$$

$$\lambda = \frac{1}{12}$$

$$p = \frac{a F v \cdot 12}{l^2}$$

$$K = \frac{E v}{l}$$

czy pomału jest pędem napędzającym styl?

$$p l = v$$

$$a = \frac{l}{12} \quad \text{albo wykreślenie, styl}$$

Jedni nie F posiada z uderzeniem masy m

1) sprężyste uderzenie: $m \frac{c^2}{2} = M \frac{v^2}{2} + \frac{K p^2}{2} = M \frac{v^2}{2} + \frac{a^2 M v^2}{K}$

$$M v^2 = \frac{m c^2}{1 + \frac{a^2 M}{K}}$$

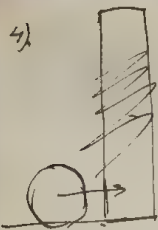
2) uderzenie niesprężyste

$$m a c = K p + m a (a p + v) = K p + m a^2 p + m a v$$

$$p = \frac{m a c}{K + m a^2}$$

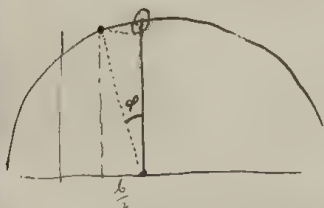
$$v = \frac{m c}{m + \frac{M}{K}}$$

$$= m a v + (K + m a^2) \frac{a M v}{K}$$



4) "Kugle" egy pásztor? Rendszeres és rendszeres feladatok
Spirális

5) ^{pásztor} Jóllehet kitérő mozgás nem szabványos $> \frac{Mg}{2} \left[\frac{\sqrt{l^2 + b^2} - l}{h} \right]$



5) ~~Rendszer~~ Milyen mozgás? $\varphi = a e^{t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}} + b e^{-t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}}$

$$K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Mgk \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{Mgk}{K} \varphi$$

$$\varphi = a e^{t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}} + b e^{-t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}}$$

$$t=0: \varphi = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi} = 0$$

$$\sqrt{\frac{K}{Mgk}} \ln \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} + 1 \right) = t = \sqrt{\frac{K}{Mgk}} \ln \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} + 1 \right)$$

$$\varphi_0 = a + b$$

$$0 = a - b$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = a + b \\ 0 = a - b \end{array} \right\} a = b = \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2} \left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} \right) = \frac{\varphi_0}{2} \left[1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right] = \varphi_0 \left[1 + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right]$$

$$\frac{2\varphi}{\varphi_0} = x + \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 2x \frac{\varphi}{\varphi_0} + 1 = 0$$

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\varphi}{\varphi_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{\varphi}{\varphi_0} \left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^2 \right) \right]$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 + \delta$$

$$= 1 + \delta \pm \left[x + 2\delta + \delta^2 - x^2 \right]^{1/2}$$

$$= 1 + \delta \pm \sqrt{2\delta^2}$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} - 1 \right)}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 + \delta$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\delta}$$

$$= \sqrt{\frac{2Mgk}{K} \delta}$$

azaz az időközönként

τ időközönként δ

Adesso lo ^{Madre giovane} ~~Madre giovane~~
Pasadone io anni, ~~come da~~ ^{Italy} ~~come da~~ ^{come da}

$$\frac{dZ}{dt} = m$$

$$y = \sum m[v[u, v]]$$

Do Kristianstva ^{de} : vateri L v dvoih smotah
 prvi oglede jakej kar vater L

Wskazanie na ^{do} jakiegoś obiektu
związane z jego istnieniem, zwanym pojęciem, ^{swój} ~~to~~ wzmianka o jego istnieniu, która może

$$\frac{dZ'}{dt}$$

$V_n z'$

W tem Z' jest \neq Długość do w. 10

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ'}{dt} + V_{\vec{u}} Z' = M$$

$$Z' = iA_1 + jA_2 + kA_3$$

$$\frac{dZ'}{dt} + V_{\infty} Z' = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\ddot{y} \frac{dy'}{dt}) &= 0 = \left(\frac{d\ddot{y}}{dt} \frac{y'}{y'} \right) = \left(\frac{d\ddot{y}}{dt} \right) \frac{y'}{y'} \quad \therefore (\ddot{y} y') = \text{const} \\ (\ddot{y}' \frac{dy'}{dt}) &= 0 \quad \therefore y'^2 = \text{const} \end{aligned} \right.$$

$$\left(\dot{L}' \frac{dL'}{dt} \right) = 0 \quad \therefore L'^2 = \text{const}$$

~~Went to the photo - out~~
^{middle}
 Went on photo in kitchen L' = went

$$\left(\frac{dx}{dt} K_x\right) = A p \cos AX + O q \cos OX + C r \cos CX$$

$$\frac{dx}{dt} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] = A \frac{dx}{dt} \cos AX + O \frac{dq}{dt} \cos OX + C \frac{dr}{dt} \cos CX$$

$$+ A p \sin AX \frac{dAX}{dt} - \dots$$

$$\frac{d(AX)}{dt} = \cancel{A \cos AX} p \cos OX + r \cos CX$$

$$AX = 0$$

$$OX = CX = \frac{\pi}{2}$$

$$p = A \frac{dx}{dt} - O q \frac{d(OX)}{dt} - C r \frac{d(CX)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{z} = m \quad m = \sum [v \gamma] = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum m [v \frac{dv}{dt}]}_{\underline{z}_0} = \sum m [v v] = \sum m [v [\underline{v} v]]$$

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d\underline{z}'}{dt} + \nabla_{\underline{u}} \underline{z}' =$$

$$A \frac{dx}{dt} \cos \theta = 0$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ A & O & C \end{vmatrix}$$

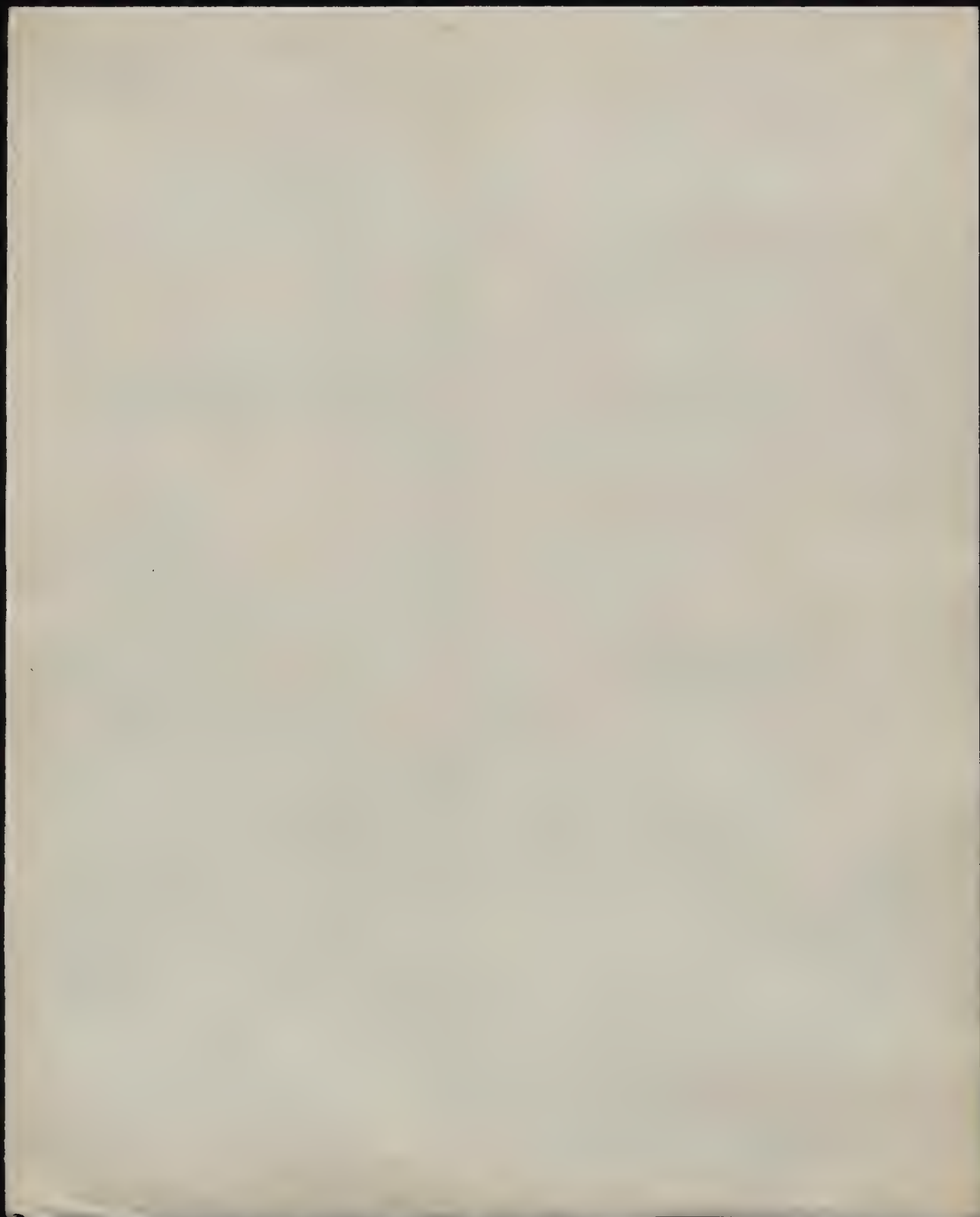
$$\underline{z} = i A p + j O q + k C r$$

$$\underline{u} = i p + j q + k r$$

\underline{z} dołazi na 0 zbit proutyany prouty

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}_3$$

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underline{z}_3$$



1). $f = m r \omega^2$ siate wyrażenie

tuż po prostu drabak siła F_p siła, która jest ω, r, m maki

f u sił powstaje

zatem od tego siła zmienną maki m i powstaje siła zmienną

Praca przez siłę F_p :

$$dW = \frac{m}{2} d(r^2 \omega^2) + f dr = m r \omega d\omega + 2m \omega^2 r dr$$

$$\frac{dW}{L} = d \ln(r^2 \omega^2)$$

Praca kinetyczna

1). siła F_p wykonuje pracę W_1 "siła" przy tym f siła wywołująca ω $\omega = m r \omega^2 + \dots$

$$L r \omega^2 = \text{const}$$

2). Dla pracy zmienną, zmienną f stała maki L i

ad. 1.

$$f = r \omega^2 = \text{const}$$

$$\text{praca } f dr = L_2 - L_1$$

$$L r \omega^2 = \text{const}$$

3). siła F_p powodująca wykonuje pracę $W_2 = \int f dr$

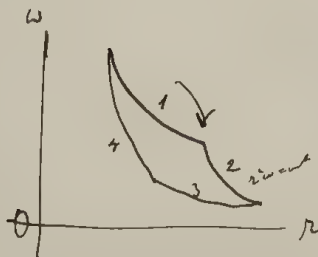
L_2 stała

ad. 1.

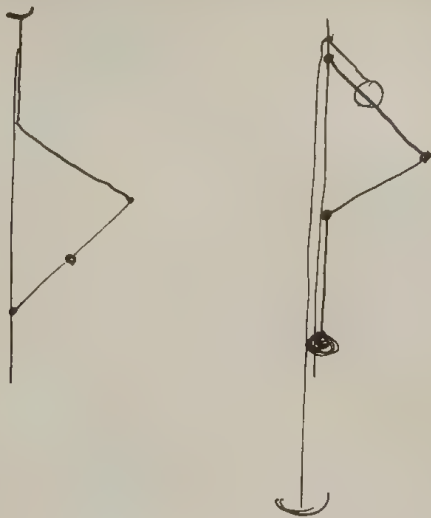
$$f = r \omega^2 = \text{const}$$

4). Dla siły

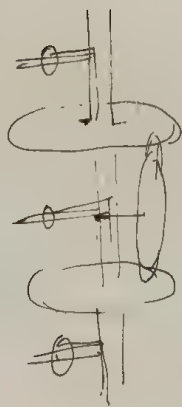
Ciepła praca wykonana $W_1 - W_2$

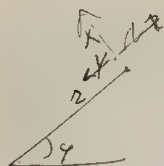


Noncylindrical or deformed parameters



Height





$$R = m(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)$$

$$F_{\perp} =$$

$$\cancel{m \ddot{\varphi} r}$$

$$m(2\dot{\varphi}\dot{y} + \ddot{\varphi}y) = \frac{d}{dt} m(\dot{\varphi}^2 y)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$x = 0 \quad y = r \quad \dot{z} = 0$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi$$

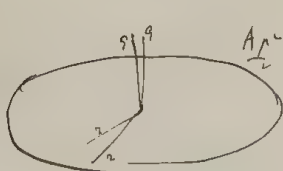
$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi}$$

$$X = m \ddot{x} + 2\dot{r}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}) + (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2) - (\dot{\varphi}^2 \dot{r}) - \dot{r}(\dot{\varphi}^2 \dot{r})$$

$$V = m \ddot{y} + 2\dot{r}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}) + (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2) - \dot{r}(\dot{\varphi}^2 \dot{r})$$

$$m \dot{y} + 2(\dot{r}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}) + \dot{\varphi}^2 \dot{r} - \dot{r}(\dot{\varphi}^2 \dot{r}) - \dot{r}(\dot{\varphi}^2 \dot{r}))$$

$$\Sigma (X_i - xV) = \frac{d}{dt} \Sigma m(\dot{x}_i^2 - x_i \dot{y}_i) +$$



$$A_{\perp}^L + \frac{D\dot{r}^2}{2} + \frac{C\dot{r}^2}{2}$$

$$A_{\perp}^L + \frac{D(\dot{r}^2 + 2r\dot{r}\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{(C\dot{r}^2 - 2r\dot{r}\dot{\varphi})^2}{2}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{r}$$

$$\varphi = r \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (D - C) r \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{A_{\perp}^L}{dt} - (D - C) r \dot{r}$$

$$K\Omega + K\omega + M$$

115

$$t \rightarrow 0: \quad \dot{\xi} = 0$$

$$\text{quadrupole: } \dot{\omega} \sim t^3$$

$$\dot{\xi} = 2\omega \sin \gamma \quad \gamma$$

$$\dot{\xi} = -g t + 2\omega \cos \gamma \cdot \gamma$$

$$\frac{d\dot{\xi}}{dt} = -2\omega (2\omega \sin \gamma \gamma - g t \cos \gamma + 2\omega \cos \gamma \gamma)$$

$$\frac{d\dot{\xi}}{dt} = \omega \cos \gamma t^2$$

$$\gamma = \frac{\omega}{3} \cos \gamma t^3$$

$$\dot{\xi} = -g t + \frac{2}{3} \omega^2 \cos \gamma t^3$$

$$\gamma - \gamma_0 = -\frac{g t^2}{2}$$

$$\dot{\xi} = \frac{2}{3} \omega^2 \cos \gamma t^3$$

$$v = v_0 + \vec{V} \cdot \vec{r}$$

~~$$v_0 = v_0 + \vec{V} \cdot \vec{r} + \vec{V} \cdot \vec{r}$$~~

$$r = \vec{V} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{V} =$$

$$v_x = 2g - y^2 + \frac{dx}{dt}$$

$$v_y =$$

$$v_z =$$

$$T = \frac{m}{2} (v_x^2 + \dots) = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dots + 2 \dot{x} (2g - y^2) + \dots + (2g - y^2)^2 \dots \right]$$

$$X = m \left[\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + (2g - y^2) \right] - 2 \dot{y} + g \dot{z} - 2(xz - 2t) + g(4x - x^2) \right]$$

$$X = m \left[\ddot{x} + 2g \dot{z} - 2 \dot{z} \dot{y} + 2 \dot{y}^2 - y \ddot{z} - 2(x \dot{y} + y \dot{x}) + 2 \dot{x} \dot{z} + 2 \dot{y} \dot{y} \right]$$

Coriolis

$$\dot{y} = g = 0 \quad z = \omega$$

~~$$\ddot{x} = \frac{X}{m} + \omega^2 x + \dot{\omega} \dot{z} + 2\omega \dot{x}$$~~

~~$$\ddot{z} + 2\omega \dot{z}$$~~

$$-m \ddot{z} = 2m \omega \dot{y}$$

$$m \ddot{x} = X + 2m \omega \dot{y}$$

$$-m \ddot{y} = -2m \omega \dot{x}$$

$$-m \ddot{y} = -2m \omega \dot{x}$$

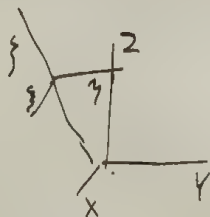
$$m \ddot{z} = 0$$

$$-m \ddot{z} = 2$$

~~$$x = \xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi$$~~

~~$$y = \eta$$~~

~~$$z = \xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi$$~~



$$\ddot{\varphi} = x \omega^2 - 2 \omega \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \omega \varphi + 2 \omega \dot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = 2 \omega \omega \dot{\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\ddot{\varphi} = -2 \omega (\dot{x} \omega \varphi + \dot{\varphi} \omega \varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = -g + 2 \omega \omega \dot{\varphi} \dot{\varphi}$$

$$N_p \ddot{x} = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = 0$$

$$\dot{y} = -2 \omega \omega \dot{\varphi} t$$

$$\dot{z} = -2 \omega \omega \dot{\varphi} \frac{t}{2}$$

$\omega \dot{\varphi} =$	N	$\text{for } \omega \dot{\varphi} =$	N
	N		E
	E		S
	S		W

$$v_x = \dot{a} + \dot{x} + qz - rz$$

$$v_y = \dot{b} + \dot{y} + rz - rz$$

$$v_z = \dot{c} + \dot{z} + ry - qx$$

$$I = \frac{m}{2} [\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2(\dot{a}\dot{x} + \dot{b}\dot{y} + \dot{c}\dot{z}) + (qz - rz)^2 + (rx - rz)^2 + (ry - rz)^2 + 2(\dot{a} + \dot{x})(qz - rz) + \dots]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m[\dot{x} + \dot{a} + (qz - rz)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m[(rz - rz) - (qy - qx)q + \dot{b}(\dot{y} + rz) - \dot{c}(\dot{z} + ry)]$$

$$m[\ddot{x} + \ddot{a} + 2(qz - rz) + \dot{b}(\dot{y} + rz) - \dot{c}(\dot{z} + ry) - (q^2 + r^2)x - r(rx + ry)] = X$$

$$r = q = 0 \quad q = \omega \quad \dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{X}{m} + 2\omega \dot{y} + \omega^2 x$$

$$\ddot{y} = \frac{Y}{m} - 2\omega \dot{x} + \omega^2 y$$

$$\ddot{z} = \frac{Z}{m}$$

$$x = \xi$$

$$y = y \cos \varphi - \dot{z} \sin \varphi$$

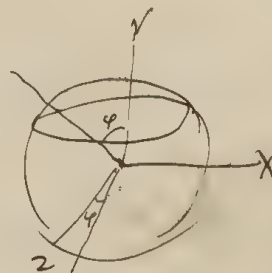
$$z = y \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi$$

$$\ddot{\xi} = \frac{X}{m} + 2\omega \dot{y} + \omega^2 x = \frac{X}{m} + 2\omega(\dot{y} \cos \varphi - \dot{z} \sin \varphi) + \omega^2 \xi$$

$$\ddot{\eta} = \frac{Y}{m} - 2\omega \dot{x} + \omega^2 y = \frac{Y}{m} - 2\omega \dot{\xi} + \omega^2 y$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{Z}{m} + 2\omega \dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi + \omega^2 z = \frac{Z}{m} + 2\omega \dot{\eta} + \omega^2 \zeta$$

$$\ddot{\xi} = \frac{X}{m}$$



$$\ddot{x} = \frac{X}{m} - 2\omega \dot{z} + \omega^2 x$$

$$\ddot{y} = \frac{Y}{m} + 2\omega \dot{x} + \omega^2 y$$

$$\ddot{z} = \frac{Z}{m} + 2\omega \dot{y} + \omega^2 z$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}$$

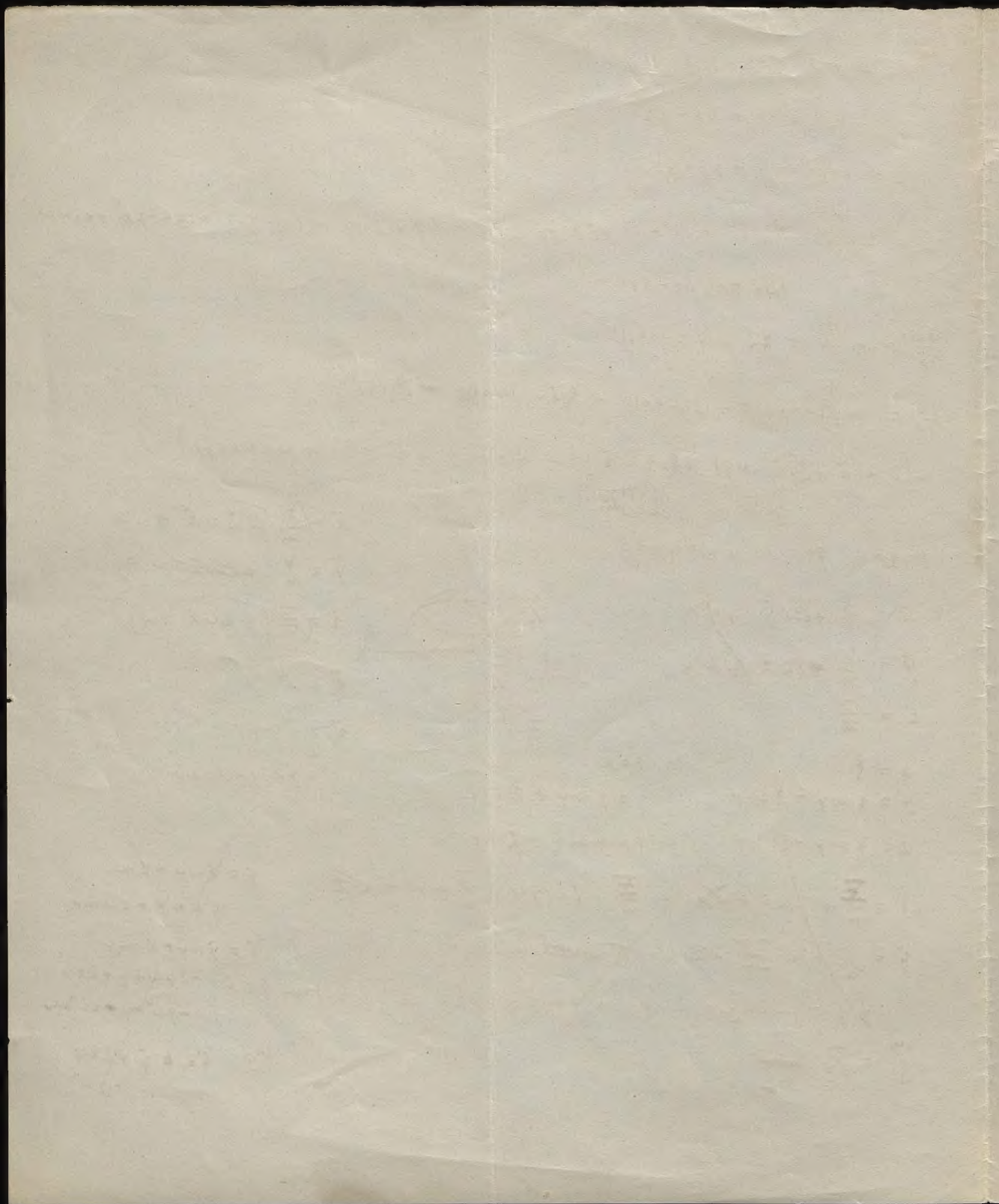
$$\ddot{\eta} = \ddot{y} \cos \varphi + \ddot{z} \sin \varphi$$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{y} \sin \varphi - \ddot{z} \cos \varphi$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{y} \cos \varphi + \ddot{z} \sin \varphi$$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{y} \sin \varphi - \ddot{z} \cos \varphi$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{y} + 2\omega \dot{\eta}$$



$$\ddot{\xi} = \frac{H}{m} - 2\omega^2 \xi = \frac{H}{m} - 2\omega(\dot{\eta} \sin \varphi + \xi \cos \varphi)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{H}{m} \cancel{\cos \varphi} + \cancel{2\omega \dot{\xi} \sin \varphi} + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi = \frac{H}{m} \cancel{\cos \varphi} + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi$$

$$\ddot{\xi} = \frac{H}{m} \cancel{\cos \varphi} - 2\omega \dot{\xi} \cos \varphi = \frac{H}{m} \cancel{\cos \varphi} - 2\omega \dot{\xi} \cos \varphi$$

$$H = -g m \quad \Xi = 2\omega$$

$$\ddot{\xi} = -2\omega(\dot{\eta} \sin \varphi + \xi \cos \varphi)$$

$$\ddot{\eta} = -g + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi$$

$$\ddot{\eta} = -g t + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi + \beta$$

$$\ddot{\xi} = -2\omega \dot{\xi} \cos \varphi$$

$$\dot{\xi} = -2\omega \xi \cos \varphi + \gamma$$

$$\ddot{\xi} = -2\omega[-g t \sin \varphi + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi + \beta \sin \varphi - 2\omega \dot{\xi} \cos \varphi + \gamma \cos \varphi]$$

propose

$$\dot{\xi} = \frac{g t^2}{2} \sin \varphi$$

$$\xi = \frac{g t^3}{6} \sin \varphi$$

$$\eta = -\frac{g t^2}{2}$$

$$\xi = 0$$

$$\text{For cond 1: } \ddot{\xi} = -2\omega \dot{\xi} \cos \varphi$$

$$\ddot{\eta} = 0$$

$$\ddot{\xi} = -2\omega \dot{\xi} + 2\omega \dot{\xi} \sin \varphi$$

$$\xi = A \cos(\omega_1 t + D) + C \cos(\omega_2 t + D)$$

$$\xi = A \sin(\omega_1 t + D) - C \sin(\omega_2 t + D)$$

$$\omega_1 = \sqrt{a^2 + \omega^2} - \omega \neq a - \omega$$

$$\omega_2 = \sqrt{a^2 + \omega^2} + \omega \neq a + \omega$$

$$t=0 \quad \xi = \xi_0 \quad \dot{\xi} = 0$$

$$\xi = 0 \quad \dot{\xi} = 0$$

$$A \cos D = C \cos D$$

$$A \sin D = C \sin D$$

$$A \cos D = C \cos D$$

$$B = D = 0$$

$$A \omega_1 = C \omega_2$$

$$D = D = 0$$

$$C = A$$

$$\xi = 2A \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$$

$$\eta = -2A \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$$

$$\xi = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

$$\eta = A(\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t)$$

$$\frac{\xi}{\eta} = -\cot \theta$$

$$\xi + \eta = 2A \cos \omega_1 t$$

